

# 耗散系统与稳定性

香港大学王永恒

# 前言

本档内容是王永恒的学习笔记，目前就读于香港大学电机与计算机工程系，导师为刘涛教授和侯云鹤教授。初稿成于 2024 年，后于 2026 年整理。档内容按八个主章组织：第一章建立能量账本；第二章给出信号空间和外部耗散定义；第三章讨论存储函数；第四章讲无源、正实和 KYP 型代数判据；第五章进入稳定性和互连系统；第六章讨论失稳与频域图形判据；第七章整理非线性与扩展结果；第八章把理论放到电力电子和微电网端口无源化中理解。附录给出矩阵工具和概念辨析。

# 目 录

---

内容	页码
前言	i
第一章 能量账本：从无源性到二次供给率	1
第二章 信号空间与耗散定义	17
第三章 存储函数：输入输出性质如何变成状态能量	28
第四章 无源、正实与代数判据	42
第五章 稳定性：单环反馈、大规模互联与小增益	83
第六章 失稳与频域图形判据	117
第七章 非线性系统与扩展结果	161
第八章 控制工程应用：电力电子、微电网与端口无源化	198
附录 A 矩阵工具附录	201
附录 B 概念辨析：我当时误解的十个问题	211
参考文献	213

---

# 第一章 能量账本：从无源性到二次供给率

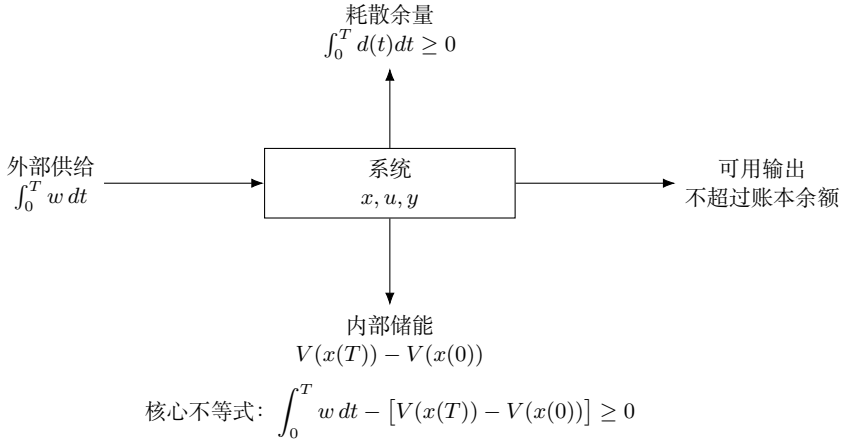


图 1.1 耗散理论的基本账本：外部供给、内部储能与不可恢复损耗。

本章先不急于写抽象定义，而是从电路、机械端口和控制系统的共同语言出发。所谓耗散，最核心的一句话是：系统可以存储能量，也可以把能量耗掉，但不能凭空产生能量。后文所有矩阵不等式、KYP 引理、正实性和稳定性定理，最后都可以追溯到这个账本。

**定义 1.1 (端口供给率)** . 设系统输入为  $u(t)$ ，输出为  $y(t)$ 。若  $y(t)^T u(t)$  表示进入系统的瞬时功率，则  $w(u, y) = y^T u$  称为无源供给率。更一般地，给定矩阵  $Q = Q^T$ 、 $R = R^T$  与适当维度的  $S$ ，二次供给率定义为

$$w(u, y) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u.$$

**评注 1.2 (供给率可以短时为负)** . 耗散理论约束的是累计能量账本，而不是要求每一时刻  $w(t) \geq 0$ 。若系统正在释放此前储存的能量，则  $w(t)$  可以为负；真正不能发生的是释放的能量超过已有储能与外部供给之和。

## 1.1 学术源流与阅读主线

前言的作用不是证明定理，而是告诉我们这本书的研究谱系和目标。读前言时要抓住三条线：

1. dissipative systems 是 passive systems 的推广。
2. passive systems 的核心来自电路和能量守恒。
3. 本书最重要的贡献方向是大规模 interconnected systems 的稳定性分析。

耗散系统理论建立在许多已有工作之上，尤其是 passive systems 和 stability。passive systems 直译是“无源系统”，典型例子是没有电源、只含电阻电容电感的电路。stability 是控制理论里判断系统响应是否保持有界、是否回到平衡点的理论。Willems 引入了“dissipative”这个标签，并给出了最基础的稳定性结果。这里的历史位置很重要：Willems 的耗散理论更一般，允许很宽泛的 supply rate；Moylan（祖师爷）选择二次 supply rate，因为二次型可以和矩阵代数、Riccati 方程、频域圆判据对接。

本书材料主要来自 Moylan 和 D. Hill（我的师爷兼偶像）的合作。大规模互联系统结果受 Vidyasagar 关于 interconnected passive systems 的工作启发。这句话暗示：全书不是只讲单个系统，而是重点讲“很多子系统连接起来后怎样保证整体稳定”。这本书的结构不是“定义一些抽象概念然后结束”，而是：

$$\begin{aligned} \text{passivity} &\rightarrow \text{dissipativity} \rightarrow \text{storage functions} \\ &\rightarrow \text{stability/instability} \rightarrow \text{interconnected systems} \\ &\rightarrow \text{frequency-domain tests.} \end{aligned}$$

也就是说，前几章的定义都是后面稳定性判据的工具，不是孤立术语。

## 1.2 从能量直觉到二次供给率

### 1.2.1 背景：从无源性到耗散性

这一节先回答“耗散系统为什么从能量说起”。本节需要抓住以下几件事：

1. 在电路中，passivity 是一个真实物理能量概念。
2. 在控制理论中，passivity 可写成输入输出积分不等式。
3. dissipativity 把真实能量推广成抽象供给率，但仍保留能量账本的数学结构。

**从一句话开始：耗散系统耗散能量。** A dissipative system is one that dissipates energy. 直译就是“耗散系统是耗散能量的系统”。这句话太不精确，不能作为严肃理论的定义。为什么不精确？因为至少有三个问题：

1. 什么叫 energy？是真实电能、机械能，还是数学上的伪能量？
2. 什么叫 dissipate？是严格变成热，还是只要求某个积分不等式非负？
3. 系统是否允许先释放已储存的能量？如果有初始储能，短时间输出能量并不违反物理无源性。

这一节的任务就是把这句直觉慢慢精确化。

**被动电路的元件级直觉。** 被动电路由 passive components 构成。典型元件：

- 电阻 resistor：消耗电能，通常转为热。
- 电容 capacitor：储存电场能量。
- 电感 inductor：储存磁场能量。
- 变压器 transformer：理想情况下功率中性，不产生也不消耗净能量。

- gyrator: 多端口网络理论中的功率中性元件。

电阻的功率:

$$p_R(t) = v_R(t)i_R(t).$$

若  $v_R = Ri_R$ , 且  $R > 0$ , 则

$$p_R(t) = Ri_R(t)^2 \geq 0.$$

这表示电阻只能吸收能量, 不能产生能量。电容储能:

$$E_C(t) = \frac{1}{2}Cv_C(t)^2, \quad C > 0.$$

电感储能:

$$E_L(t) = \frac{1}{2}Li_L(t)^2, \quad L > 0.$$

二者能释放之前储存的能量, 但不能释放超过已经存入的能量。若  $C < 0$  或  $L < 0$ , 这些储能表达式会变成可为负的“能量”, 这破坏 passivity。所以说负电容、负电感不是 passive, 而是后面会叫 cyclo-passive。

**从元件到多端口系统。** 为了把“电路由无源元件组成”变成系统定义, 我们把整个电路看成有外部端口的系统。每个端口有:

- 电压  $v_k(t)$ , 单位 V。
- 进入电路的电流  $i_k(t)$ , 单位 A。

对第  $k$  个端口, 瞬时功率是

$$p_k(t) = v_k(t)i_k(t).$$

如果约定电流方向是“进入系统”, 则  $p_k(t) > 0$  表示外部向系统输入功率;  $p_k(t) < 0$  表示系统向外部输出功率。把所有端口合起来:

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}, \quad i(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_n(t) \end{bmatrix}.$$

其中  $v(t), i(t) \in \mathbb{R}^n$ 。总功率为

$$p(t) = v(t)^T i(t).$$

一步一步做矩阵乘法:

$$v(t)^T = \begin{bmatrix} v_1(t) & v_2(t) & \cdots & v_n(t) \end{bmatrix}.$$

所以

$$v(t)^T i(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) & v_2(t) & \cdots & v_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_n(t) \end{bmatrix}.$$

按行乘列：

$$v(t)^T i(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) + \cdots + v_n(t)i_n(t) = \sum_{k=1}^n v_k(t)i_k(t).$$

**从功率到能量。** 功率  $p(t)$  是单位时间输入能量。能量是功率对时间积分：

$$E(0, T) = \int_0^T p(t) dt.$$

代入  $p(t) = v(t)^T i(t)$ ：

$$E(0, T) = \int_0^T v(t)^T i(t) dt.$$

如果初始没有储能，一个 passive circuit 不能在任何时间  $T$  之前净输出能量。因此要求

$$\int_0^T v(t)^T i(t) dt \geq 0, \quad \forall T \geq 0.$$

这里的“所有  $T$ ”非常重要。它不是只看最终总账，而是任意时刻都不能透支。

**控制理论记号：从  $v, i$  到  $u, y$ 。** 控制理论中系统通常写成：

- 输入  $u(t)$ 。
- 输出  $y(t)$ 。

如果我们选择端口电流为输入、电压为输出，则

$$u(t) = i(t), \quad y(t) = v(t).$$

于是

$$y(t)^T u(t) = v(t)^T i(t).$$

passivity 条件变为

$$\int_0^T y(t)^T u(t) dt \geq 0, \quad \forall T \geq 0.$$

如果选择反过来  $u = v, y = i$ ，也得到同样的标量乘积  $i^T v = v^T i$ 。在多端口中还可混合选择，但必须保持供给率的物理意义或数学意义一致。

**为什么 integrand 可以短时为负。** passivity 要求的是积分非负：

$$\int_0^T y^T u dt \geq 0.$$

它不要求每个时刻

$$y(t)^T u(t) \geq 0.$$

系统可以短时间向外输出功率，即  $y^T u < 0$ ，只要这部分能量不超过之前已经输入或储存的能量。比如电容先被充电，之后放电时端口功率可以为负。

**旋转机械例子。** 作者给出 rotating machine 的例子：

- 输入：轴 torque  $\tau(t)$ ，单位  $\text{N} \cdot \text{m}$ 。
  - 输出：角速度  $\omega(t)$ ，单位  $\text{rad/s}$ 。弧度 dimensionless，因此单位可看作  $1/s$ 。
- 机械功率：

$$p(t) = \tau(t)\omega(t).$$

单位：

$$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\text{J}}{s} = \text{W}.$$

这说明 passivity 不限于电路。只要输入输出乘积具有功率结构，就能用同一数学理论。

**关键抽象：伪能量。** 后面的理论其实不需要这个“energy”是真实物理能量。我们可以把

$$y^T u$$

当成数学供给率。只要它满足合适不等式，就能推出稳定性。于是可以定义任意 supply rate：

$$w(u, y).$$

本书尤其关注二次型：

$$w(u, y) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u.$$

二次型供给率的维度检查。设

$$y \in \mathbb{R}^p, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

则：

$$Q \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad S \in \mathbb{R}^{p \times m}, \quad R \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

检查  $y^T Q y$ ：

$$y^T \in \mathbb{R}^{1 \times p}, \quad Q \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad y \in \mathbb{R}^{p \times 1}.$$

所以

$$y^T Q y \in \mathbb{R}^{1 \times 1}.$$

检查  $y^T S u$ ：

$$y^T \in \mathbb{R}^{1 \times p}, \quad S \in \mathbb{R}^{p \times m}, \quad u \in \mathbb{R}^{m \times 1}.$$

所以

$$y^T S u \in \mathbb{R}^{1 \times 1}.$$

检查  $u^T R u$ ：

$$u^T \in \mathbb{R}^{1 \times m}, \quad R \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad u \in \mathbb{R}^{m \times 1}.$$

所以也是标量。

**相对 Willems 的两点不同。** 第一点：Willems 从内部 storage function 定义 dissipativity。Moylan 先定义输入输出性质，再推出 storage function。这在工程上很重要，因为很多时候我们只有输入输出模型，不知道内部状态。第二点：本书主要研究 quadratic supply rates。一般  $w(u, y)$  更广泛，但二次型能带来：

- 代数矩阵不等式。
- Riccati 方程。
- 频域圆判据。
- 小增益和无源定理统一。

**小结与辨析。** 第一，把 dissipativity 等同于真实热耗散。本文允许伪能量。第二，以为  $y^T u \geq 0$  必须逐点成立。passivity 要求积分从初始时刻到任意  $T$  非负。第三，忽视初始储能。若系统一开始有储能，外部 passivity 需要修正为 internal passivity。

### 1.2.2 动态系统的输入输出表示

建立系统的抽象表示：

$$y = Gu.$$

这里需要明确： $G$  是把一条输入信号映射为一条输出信号的算子，而不是普通数值函数；同时还要区分无记忆性、因果性和信号空间。

**系统作为算子。** 输入  $u$  是一个完整信号，不是某一时刻的数值。输出  $y$  也是完整信号。系统  $G$  把整条输入信号映射为整条输出信号：

$$G : u \mapsto y.$$

写作

$$y = Gu.$$

若  $G$  非线性，通常写

$$y = G(u).$$

作者为了简洁常写  $Gu$ ，但不意味着  $G$  一定线性。

**线性系统和非线性系统。** 如果  $G$  线性，则满足叠加性：

$$G(au_1 + bu_2) = aG(u_1) + bG(u_2).$$

例如线性时不变系统满足 convolution：

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau.$$

非线性系统不满足叠加。例如：

$$y(t) = u(t)^2.$$

检查线性性：

$$G(u_1 + u_2) = (u_1 + u_2)^2 = u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2,$$

而

$$G(u_1) + G(u_2) = u_1^2 + u_2^2.$$

二者相差  $2u_1u_2$ ，所以非线性。

**信号是时间函数，但不只限于时间函数。** 多数控制系统中：

$$u(t), \quad y(t)$$

是时间函数。 $t$  可以是连续时间，也可以是离散时间索引。图像处理信号可能定义在二维空间上：

$$u(x_1, x_2).$$

电磁场信号可能定义在空间和时间上：

$$E(r, t), \quad H(r, t).$$

因此理论上需要 signal space，即所有允许信号组成的空间。

**输入输出划分的任意性。** 不一定非要把外部变量分成输入和输出。更一般的 behavioral approach 可以只讨论所有变量的约束关系。但传统系统理论通常把系统看成 input-output map，所以本书沿用  $y = Gu$ 。工程上，输入输出选择可能是人为的。例如电路端口：

- 选择电流输入、电压输出： $y = Zu$ ，其中  $Z$  是阻抗。
- 选择电压输入、电流输出： $y = Yu$ ，其中  $Y$  是导纳。

两种模型描述同一个物理端口，但系统算子不同。

**单值性假设。** 写  $y = Gu$  暗示每个  $u$  有唯一  $y$ 。更一般地，系统可以是关系：

$$\mathcal{G} \subset U \times Y,$$

允许一个输入对应多个输出。比如含滞回或非唯一解的微分包含系统。作者不采用这种更一般模型，因为  $y = Gu$  可读性更好。

**memoryless。** 系统 memoryless，若

$$y(t) \text{ 只依赖 } u(t).$$

例子：

$$y(t) = \tanh(u(t)).$$

这没有动态记忆。非 memoryless 例子：

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad y(t) = x(t).$$

这里  $y(t)$  依赖过去输入，因为状态  $x(t)$  是过去输入累积的结果。

**causal**。系统 causal，若当前输出只依赖过去和现在输入：

$$y(t) \text{ depends only on } u(\tau), \quad \tau \leq t.$$

非因果例子：

$$y(t) = u(t + 1).$$

它需要未来输入  $u(t + 1)$ ，物理上不能实时实现。第 2 章会把因果性写成：

$$P_T G = P_T G P_T.$$

**本节在全书中的作用**。后面所有定义都以  $y = Gu$  为约束。尤其是耗散不等式：

$$\int_0^T w(u(t), y(t)) dt \geq 0$$

不是对任意独立的  $u, y$  成立，而是对满足

$$y = Gu$$

的输入输出对成立。

### 1.2.3 无源性的外部定义

把 passivity 从“电路没有源”变成严格输入输出不等式，并说明为什么必须对任意有限时间区间成立。

**电气  $n$ -port 模型**。作者考虑一个电气  $n$ -port circuit。设：

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

是端口电压向量，

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

是端口电流向量。在合适符号约定下，流入电路的总功率为

$$p(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) y_i(t).$$

用矩阵写：

$$p(t) = y(t)^T u(t).$$

注意  $y^T u = u^T y$ ，因为二者都是同一个标量。

**能量输入。** 从  $t_0$  到  $t_1$ ：

$$E(u, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} y(t)^T u(t) dt.$$

逐步解释：

1.  $y(t)^T u(t)$  是时刻  $t$  的功率。
2.  $dt$  是很小时间长度。
3.  $y(t)^T u(t)dt$  是这小段时间输入的能量。
4. 积分把所有小段能量相加。

**外部 passivity 定义。** 无初始储能时，passive system 满足：

$$E(u, t_0, t_1) \geq 0$$

对任意输入历史  $u$  和任意  $t_1 \geq t_0$  成立。若系统 time-invariant，起点可设为 0：

$$E(u, 0, T) = \int_0^T y(t)^T u(t) dt \geq 0, \quad \forall T \geq 0.$$

**为什么不能用  $\infty$  代替所有  $T$ 。** 假设只要求

$$\int_0^{\infty} y^T u dt \geq 0.$$

这允许下面的情形：

$$\int_0^1 y^T u dt = -10,$$

$$\int_1^{\infty} y^T u dt = +11.$$

总和为 +1，但系统在前 1 秒净输出了 10 单位能量。如果初始没有储能，这是不允许的。因此 passivity 必须要求每个有限  $T$ ：

$$\int_0^T y^T u dt \geq 0.$$

**ultimately passive / cyclopassive 的伏笔。** 只看最终总能量的条件更弱。作者说后面会把这类性质叫 ultimately passive 或 cyclopassive。这为第 2 章 UVD 和第 3 章 cyclodissipativity 埋下伏笔。

### 1.2.4 把初始储能写入账本

处理初始储能问题，引入 internal passivity。

**为什么 external passivity 不够。** 如果电容在  $t = 0$  前已经充电，那么即使电路由无源元件组成，也可以在  $t = 0$  后向外部释放能量。此时

$$\int_0^T y^T u dt$$

可能为负。这不说明电路有源，而是说明初始状态中已有能量。

**储能函数。** 引入状态  $x(t)$  和储能函数：

$$\phi : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

$\phi(x)$  表示状态  $x$  中存储的能量或伪能量。

如果是真实电路：

- 电容状态可能是电压。
- 电感状态可能是电流。
- $\phi$  是所有电容电感储能之和。

**internal passivity 不等式。** 能量账本：

初始储能 + 外部输入能量  $\geq$  最终储能。

数学式：

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} y(t)^T u(t) dt \geq \phi(x(t_1)).$$

若把 dissipated energy 写出来：

$$D(t_0, t_1) = \phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} y^T u dt - \phi(x(t_1)).$$

internal passivity 等价于

$$D(t_0, t_1) \geq 0.$$

**因子 2 的细节。** 后面常用

$$2y^T u$$

作为 passivity 的供给率。如果原物理储能是  $E_{\text{phys}}$ ，则数学储能可取

$$\phi = 2E_{\text{phys}}.$$

因为不等式乘以正数 2 不改变非负性：

$$\int y^T u dt \geq 0 \iff \int 2y^T u dt \geq 0.$$

### 1.2.5 无源性与稳定性的联系

说明 passivity 为什么能推出稳定，但必须小心边界情形。

**输入输出稳定直觉。** 系统不稳定的直觉是：有界输入导致无界输出。passive system 不能自己产生能量，因此输出能量应该受输入能量限制。不过，普通 passivity 只说系统不净产生能量，不保证能量被耗散掉。无损系统可以一直振荡。

**strong passivity 的必要性。** 考虑理想 LC 电路，没有电阻。它是 passive，因为没有能量源。但它可以持续振荡，所以不渐近稳定。要得到衰减，需要某种严格耗散，例如电阻。数学上，后文会用 OSP/ISP/VSP 表达这种严格性。

**Lyapunov 伪能量。** Lyapunov 函数  $V(x)$  不要求是真实物理能量。只要：

$$V(x) > 0 \text{ for } x \neq 0, \quad V(0) = 0,$$

且零输入下

$$V(x(t_1)) \leq V(x(t_0)),$$

就能证明稳定。若还能证明只有  $x = 0$  能让  $V$  不下降，则可证明渐近稳定。storage function  $\phi$  就是耗散理论中的 Lyapunov 候选。

**互联伏笔。** 作者说 passive circuits 的互联仍 passive。这个事实非常强：复杂电路可以由简单无源元件组成，而整体无源性自动成立。后面第 6 章把这个思想推广到一般  $(Q, S, R)$  dissipative subsystems。

### 1.2.6 有限增益系统

定义 finite gain，并详细推导它对应  $(-I, 0, k^2 I)$  dissipativity。

**截断信号。** 给定  $T$ ，定义

$$u_T = P_T u.$$

具体：

$$u_T(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t < T, \\ 0, & t \geq T. \end{cases}$$

同理

$$y_T = P_T y.$$

截断的意义：只看系统到时间  $T$  之前的行为。

**finite gain 定义。** 存在常数  $k \geq 0$ ，使

$$\|y_T\| \leq k \|u_T\|$$

对所有输入  $u$  和所有  $T \geq 0$  成立。这个定义中的  $k$  是统一常数，不允许随  $T$  变。如果  $k$  可以随  $T$  变，那么长期增长的系统也可能在每个有限  $T$  有某个局部界，稳定性就失去意义。

**用  $L_2$  范数展开。** 若

$$\|y_T\|^2 = \int_0^T y(t)^T y(t) dt,$$

$$\|u_T\|^2 = \int_0^T u(t)^T u(t) dt,$$

finite gain：

$$\|y_T\| \leq k \|u_T\|.$$

因为两边非负，平方不改变方向：

$$\|y_T\|^2 \leq k^2 \|u_T\|^2.$$

代入积分：

$$\int_0^T y^T y dt \leq k^2 \int_0^T u^T u dt.$$

把左边移到右边：

$$0 \leq k^2 \int_0^T u^T u dt - \int_0^T y^T y dt.$$

合并成一个积分：

$$0 \leq \int_0^T (k^2 u^T u - y^T y) dt.$$

写成标准顺序：

$$\int_0^T (-y^T y + k^2 u^T u) dt \geq 0.$$

对比二次供给率：

$$y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u.$$

逐项匹配：

$$y^T Q y = -y^T y \Rightarrow Q = -I,$$

$$2y^T S u = 0 \Rightarrow S = 0,$$

$$u^T R u = k^2 u^T u \Rightarrow R = k^2 I.$$

因此 finite gain 是

$$(-I, 0, k^2 I)$$

dissipativity。

**稳定性问题。** 如果 finite gain 被定义为 input-output stability, 那么 finite gain 推出 input-output stability 是定义本身。更有趣的问题是：

1. finite gain 是否推出内部状态稳定？
2. finite gain 系统互联后是否仍 finite gain？

第 6 章会处理这类问题。

### 1.2.7 从无源性推广到耗散性

把 passivity、finite gain、Nyquist 小增益、conicity 统一为  $(Q, S, R)$  dissipativity。

**Nyquist 直觉。** 单环反馈中, Nyquist 判据大意是: 环路增益到达临界点  $-1$  时会发生不稳定。若使用负反馈,  $-1$  对应幅值 1 和相位  $180^\circ$ 。小增益定理避免不稳定的方式是: 让环路增益幅值始终小于 1。

passivity 避免不稳定的方式是: 控制相位。线性 passive system 的相位位于  $-90^\circ$  和  $+90^\circ$  之间, 两个 passive systems 串联总相位位于  $-180^\circ, +180^\circ$  之间。加严格性后可避免刚好落在危险边界。

**conicity 的动机。** 小增益只看幅值, passivity 主要看相位。自然问题: 能不能允许幅值和相位 trade off? Zames 的 conicity 就是这样的中间性质。对线性系统, conicity 可解释为 transfer function 的 Nyquist 图避开某个圆。一个极端是圆心在原点, 对应有限增益; 另一个极端是圆退化成直线, 对应 passivity。

**finite gain 写成积分。** 从 1.6 得到:

$$\int_0^T (-y^T y + k^2 u^T u) dt \geq 0.$$

这可写为

$$\int_0^T (y^T (-I)y + 2y^T 0u + u^T (k^2 I)u) dt \geq 0.$$

所以是  $(-I, 0, k^2 I)$  dissipativity。

**passivity 写成积分。** passivity:

$$\int_0^T y^T u dt \geq 0.$$

乘以 2:

$$\int_0^T 2y^T u dt \geq 0.$$

写成二次供给率:

$$Q = 0, \quad S = I, \quad R = 0.$$

因为

$$y^T 0y + 2y^T Iu + u^T 0u = 2y^T u.$$

一般二次供给率。统一写作：

$$\int_0^T (y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u) dt \geq 0.$$

其中  $Q, R$  对称。若不对称，只取对称部分也不改变二次型：

$$y^T Q y = y^T \left( \frac{Q + Q^T}{2} \right) y.$$

什么样的  $(Q, S, R)$  有意义。若

$$S = 0, \quad Q > 0, \quad R > 0,$$

则

$$y^T Q y + u^T R u \geq 0$$

对任何  $u, y$  都成立。这样任何系统都 dissipative，条件没有区分能力。真正有意义的是：

1. 若  $u, y$  可独立选择，供给率有时可为负。
2. 但系统约束  $y = Gu$  使得沿真实输入输出轨迹积分非负。

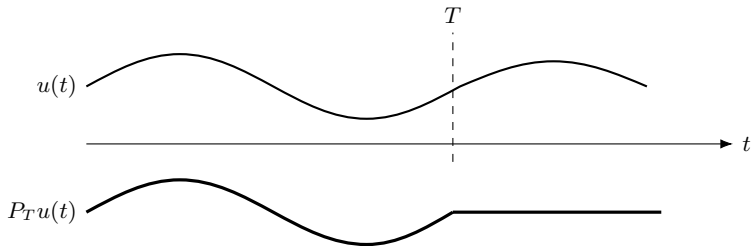
这就是“系统性质”而不是“矩阵性质”。

**本章小结。** Chapter 1 完成了从物理电路到抽象二次耗散的路线：

$$\text{电路功率 } v^T i \rightarrow \text{控制供给率 } y^T u \rightarrow \text{二次供给率 } y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u.$$

下一章将把这些直觉变成严格定义：信号空间、截断、因果性、dissipativity、UVD 和 weak dissipativity。

## 第二章 信号空间与耗散定义



只保留  $[0, T]$  内信号，耗散不等式必须对每个  $T$  成立

图 2.1 截断算子  $P_T$ ：耗散性必须对任意有限时间窗口成立。

本章把上一章的能量直觉变成可计算的输入输出定义。关键工具是信号空间、扩展信号空间、截断算子和截断内积。初学者容易忽略这些对象，以为耗散性只是一个积分不等式；实际上，正是这些对象保证了“不看未来”“任意有限时间”“输入输出成对出现”等条件被严格写进理论。

**定义 2.1 (截断内积)** . 对信号  $f, g$ ，定义

$$\langle f, g \rangle_T := \int_0^T f(t)^T g(t) dt.$$

若  $P_T$  表示把  $T$  之后的信号置零，则  $\langle f, g \rangle_T = \langle P_T f, P_T g \rangle$ 。

**定义 2.2 (( $Q, S, R$ )-耗散性)** . 系统  $G$  称为关于  $(Q, S, R)$  耗散，若对每个合法输入  $u$ 、对应输出  $y = Gu$  和每个  $T \geq 0$ ，都有

$$\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq 0.$$

这里的  $u, y$  不是相互独立的变量，而必须满足系统关系  $y = Gu$ 。

### 2.1 信号空间、截断与外部耗散定义

#### 2.1.1 本章概览

第 1 章给出了物理动机：从 passivity 到 dissipativity。第 2 章开始做严格数学定义。为了定义“系统是  $(Q, S, R)$  dissipative”，我们必须先说清楚：

1. 输入输出信号属于什么空间。
2. 什么叫内积和范数。
3. 什么叫截断信号。
4. 什么叫因果系统。

5. 为什么要引入扩展空间  $U_e, Y_e$ 。

6. 完整 dissipativity、UVD、weak dissipativity 有什么区别。

本节只有一句话式 overview：耗散性不是直接写一个积分就完了。积分是否有意义，取决于信号空间和内积的定义。

### 2.1.2 数学环境

建立后续所有不等式使用的数学环境：linear space、normed linear space、inner product space、adjoint、positive definite operator、causal truncation。

**线性空间。** 线性空间  $V$  是一组对象，称为向量。它允许两个操作：

1. 向量加法：若  $v_1, v_2 \in V$ ，则  $v_1 + v_2 \in V$ 。

2. 标量乘法：若  $v \in V, \alpha \in F$ ，则  $\alpha v \in V$ 。

这里  $F$  是 field，例如实数域  $\mathbb{R}$  或复数域  $\mathbb{C}$ 。在系统理论里，向量不一定是有限维列向量，也可以是函数。例如一个输入信号  $u(t)$  本身就是函数空间中的一个向量。

**范数。** 范数是衡量向量大小的函数：

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

它满足三条性质。第一，非负性和定性：

$$\|v\| \geq 0,$$

并且

$$\|v\| = 0 \iff v = 0.$$

第二，齐次性：

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|.$$

第三，三角不等式：

$$\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|.$$

控制中的 finite gain 就是用范数比较输出大小和输入大小。

**内积。** 内积是两个向量的标量函数：

$$\langle x, y \rangle.$$

原文采用的约定是对第二个变量线性：

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle,$$

$$\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

共轭对称:

$$\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle^*.$$

正定性:

$$\langle x, x \rangle \geq 0,$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

**诱导范数。** 内积诱导范数:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

PDF 抽取文本把根号丢了, 标准公式必须有平方根。原因是若在欧氏空间中

$$\langle x, x \rangle = x^T x = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

那么通常范数是

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

如果不取平方根, 齐次性会变成  $\|\alpha x\| = \alpha^2 \|x\|$ , 不满足范数定义。

**伴随算子。** 线性算子  $Q$  的 adjoint  $Q^*$  定义为:

$$\langle Q^* x, y \rangle = \langle x, Qy \rangle.$$

实有限维矩阵中, 若内积是  $x^T y$ , 则  $Q^* = Q^T$ 。验证:

$$\langle Q^T x, y \rangle = (Q^T x)^T y = x^T Qy = \langle x, Qy \rangle.$$

复矩阵中, 伴随是共轭转置:

$$Q^* = \overline{Q}^T.$$

self-adjoint、nonnegative definite、positive definite。若

$$Q^* = Q,$$

则  $Q$  self-adjoint。实矩阵里就是对称矩阵。写

$$Q \geq 0$$

表示

$$\langle y, Qy \rangle \geq 0, \quad \forall y.$$

这叫 nonnegative definite。若

$$\langle y, Qy \rangle > 0, \quad \forall y \neq 0,$$

则  $Q > 0$ , 叫 positive definite。类似地:

$$Q < 0$$

表示

$$\langle y, Qy \rangle < 0, \quad \forall y \neq 0.$$

$L_2$  内积。连续时间常用信号空间是  $L_2[0, \infty)$ , 其内积为

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(t)^T g(t) dt.$$

如果  $f, g$  是向量函数, 先在每个时间点做点积:

$$f(t)^T g(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(t),$$

再对时间积分。对应范数:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} f(t)^T f(t) dt}.$$

离散时间对应:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)^T g(k),$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} f(k)^T f(k)}.$$

**时间线。** 作者提醒，时间线通常是：

$$[0, \infty)$$

或离散版本：

$$\{0, 1, 2, \dots\}.$$

有些理论也使用

$$(-\infty, \infty).$$

本书大多使用从 0 开始的半无限时间线。

**因果截断算子  $P_T$ 。** 定义：

$$(P_T f)(t) = \begin{cases} f(t), & t < T, \\ 0, & t \geq T. \end{cases}$$

这叫 causal truncation，因为它保留  $T$  之前的信号，抹掉  $T$  之后的未来。

$P_T$  是投影。投影要求：

$$P_T^2 = P_T.$$

验证：对任意  $t < T$ ,

$$(P_T f)(t) = f(t).$$

再截断一次：

$$(P_T(P_T f))(t) = (P_T f)(t) = f(t).$$

对任意  $t \geq T$ ,

$$(P_T f)(t) = 0.$$

再截断：

$$(P_T(P_T f))(t) = 0.$$

所以对所有  $t$ ,

$$P_T(P_T f) = P_T f.$$

$P_T$  自伴。在  $L_2$  内积下：

$$\langle P_T x, y \rangle = \int_0^\infty (P_T x)(t)^T y(t) dt.$$

由于  $P_T x(t) = 0$  for  $t \geq T$ ，积分变成

$$\int_0^T x(t)^T y(t) dt.$$

另一方面：

$$\langle x, P_T y \rangle = \int_0^\infty x(t)^T (P_T y)(t) dt = \int_0^T x(t)^T y(t) dt.$$

因此

$$\langle P_T x, y \rangle = \langle x, P_T y \rangle.$$

所以

$$P_T^* = P_T.$$

**截断内积。** 定义：

$$\langle x, y \rangle_T = \langle P_T x, P_T y \rangle.$$

利用自伴和投影性质：

$$\langle P_T x, P_T y \rangle = \langle x, P_T (P_T y) \rangle = \langle x, P_T y \rangle.$$

又因为  $P_T^* = P_T$ ：

$$\langle x, P_T y \rangle = \langle P_T x, y \rangle.$$

所以

$$\langle x, y \rangle_T = \langle P_T x, P_T y \rangle = \langle P_T x, y \rangle = \langle x, P_T y \rangle.$$

**因果性精确定义。** 系统 causal 若

$$P_T G = P_T G P_T.$$

对任意输入  $u$ ：左边：

$$P_T G u$$

表示完整输入  $u$  产生输出  $G u$ ，再保留  $T$  之前输出。右边：

$$P_T G P_T u$$

表示先把  $u$  的未来截掉，再通过系统，再保留  $T$  之前输出。若二者相等，说明  $T$  之前的输出不依赖  $T$  之后的输入。

**memoryless 和 anticausal。** anticausal 表示时间反向意义下 causal，即输出只依赖未来输入。memoryless 可看作同时 causal 和 anticausal：它既不依赖未来，也不依赖过去，只依赖当前。

### 2.1.3 信号空间

解释为什么不能只把系统定义为  $G : U \rightarrow Y$ ，而需要扩展空间  $U_e, Y_e$ 。

**小信号空间的问题。** 如果  $U = L_2[0, \infty)$ ，那么正弦信号

$$u(t) = \sin t$$

不属于  $U$ ，因为

$$\int_0^{\infty} \sin^2 t \, dt = \infty.$$

但正弦输入在频域分析里必不可少。另一个问题是，不稳定系统可能把  $u \in U$  映射成  $y \notin Y$ 。如果一开始就要求  $G : U \rightarrow Y$ ，不稳定系统反而无法被描述。

**扩展输入空间。定义**

$$U_e = \{u : P_T u \in U \text{ for all } T\}.$$

也就是说， $u$  的每个有限时间截断都属于小信号空间  $U$ ，但  $u$  本身可以不属于  $U$ 。对输出：

$$Y_e = \{y : P_T y \in Y \text{ for all } T\}.$$

系统现在定义为

$$G : U_e \rightarrow Y_e.$$

**小信号空间和稳定性。** 小信号空间  $U, Y$  仍然重要，因为稳定性定义要问：如果输入小，即  $u \in U$ ，输出是否也小，即  $Gu \in Y$ ？定义：

$$K(G) = \{u \in U : Gu \in Y\}.$$

如果

$$K(G) = U,$$

则系统 input-output stable。如果

$$K(G) \neq U,$$

则存在  $u \in U$  使  $Gu \notin Y$ ，系统 input-output unstable。

**time invariance。** 作者本书只考虑 time-invariant systems。时不变意味着输入延迟多少，输出也延迟多少，系统本身规律不随时间改变。时变系统可以扩展处理，但符号和定理会复杂得多。

### 2.1.4 耗散性的定义

正式定义  $(Q, S, R)$  dissipativity。

**定义前的对象。** 系统：

$$y = Gu.$$

输入：

$$u \in U_e.$$

输出：

$$y = Gu \in Y_e.$$

算子：

- $Q$ ：作用在输出空间。
- $S$ ：从输入空间映到输出相关交叉项。
- $R$ ：作用在输入空间。

其中  $Q, R$  self-adjoint。

**定义。** 系统是  $(Q, S, R)$  dissipative，若

$$\langle Gu, QGu \rangle_T + 2\langle Gu, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq 0$$

对所有  $u \in U_e$ 、所有  $T$  成立。因为  $y = Gu$ ，写成：

$$\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq 0.$$

**连续时间展开。** 若内积为  $L_2$  截断内积:

$$\langle y, Qy \rangle_T = \int_0^T y(t)^T Qy(t) dt.$$

$$\langle y, Su \rangle_T = \int_0^T y(t)^T Su(t) dt.$$

$$\langle u, Ru \rangle_T = \int_0^T u(t)^T Ru(t) dt.$$

所以:

$$\int_0^T [y(t)^T Qy(t) + 2y(t)^T Su(t) + u(t)^T Ru(t)] dt \geq 0.$$

**为什么不能任意选  $u, y$ 。** 如果  $u$  和  $y$  可以独立选择, 那么很多  $(Q, S, R)$  会让不等式失败。但系统耗散性只要求在系统约束

$$y = Gu$$

下成立。这个约束是核心。例如 finite gain 中:

$$-y^T y + k^2 u^T u$$

对任意独立  $u, y$  不一定非负; 如果  $y$  特别大而  $u = 0$ , 它为负。但对一个增益小于  $k$  的系统,  $y$  不能独立变大, 因此积分非负。

**和 Willems 的不同。** Willems 的 supply rate 可以是更一般函数  $w(u, y)$ 。Moylan 选择二次型:

$$w(u, y) = y^T Qy + 2y^T Su + u^T Ru.$$

牺牲一般性, 换来显式矩阵和频域结果。

### 2.1.5 最终虚耗散性与弱耗散性

定义两个弱于 dissipativity 的性质: UVD 和 weak dissipativity。它们在后面不稳定和非零初态分析中很重要。

**UVD 定义。** 系统是  $(Q, S, R)$  ultimately virtually dissipative, 若

$$\langle Gu, QGu \rangle + 2\langle Gu, Su \rangle + \langle u, Ru \rangle \geq 0$$

对所有

$$u \in K(G)$$

成立。这里没有下标  $T$ ，表示使用完整内积，而不是截断内积。

**为什么 UVD 更弱。** 完整 dissipativity 要求：

$$\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq 0$$

对所有  $T$ 、所有  $u \in U_e$  成立。UVD 只要求：

1. 对  $u \in K(G)$ ，即小输入且输出也小的输入。
2. 对完整时间内积。
3. 不要求每个有限截断  $T$ 。

所以 dissipativity 推出 UVD，但 UVD 不推出 dissipativity。

**weak dissipativity 定义。** 系统 weakly dissipative，若存在常数  $\beta$ ，使

$$\langle Gu, QGu \rangle_T + 2\langle Gu, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T + \beta \geq 0$$

对所有  $u \in U_e$ 、所有  $T$  成立。

**$\beta$  的物理意义。** 从非零初始状态出发时，系统可能释放初始储能。若初始储能为  $\phi(x_0)$ ，内部耗散不等式：

$$\phi(x_0) + E(x_0, u, 0, T) \geq \phi(x(T)).$$

若  $\phi(x(T)) \geq 0$ ，则

$$E(x_0, u, 0, T) + \phi(x_0) \geq 0.$$

这与 weak dissipativity 相同：

$$E + \beta \geq 0,$$

其中

$$\beta = \phi(x_0).$$

**为什么 UVD 与 instability 有关。** 后面第 7 章会证明，在  $Q \leq 0$  和 causality 条件下，如果系统 UVD 但不是 dissipative，那么它必须 input-output unstable。直觉是：系统最终总账看起来不亏，但某些有限时间截断可能透支能量，这种透支对应不稳定行为。

# 第三章 存储函数：输入输出性质如何变成状态能量

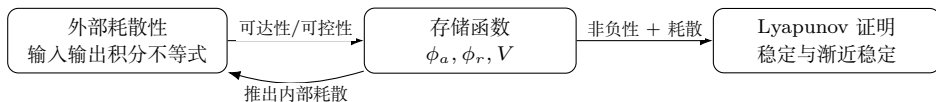


图 3.1 外部耗散性、可达性与存储函数之间的桥梁。

输入输出定义只看端口信号，状态空间定义则引入系统内部的“能量账本”。本章说明二者不是两套割裂理论：在适当可达性假设下，外部耗散性会导出存储函数；有了存储函数，也能直接推出内部耗散不等式。

**定义 3.1 (存储函数)** . 函数  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  称为存储函数，若它满足非负性并且沿任意轨迹满足

$$\phi(x(t_1)) - \phi(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} w(u(t), y(t)) dt.$$

若暂不要求  $\phi \geq 0$ ，则称为虚存储函数。

**评注 3.2 (从积分到账本)** . 上述不等式等价于“初始储能 + 外部供给  $\geq$  最终储能”。这一定义允许系统短时间向外输出能量，但输出必须由初始储能或此前输入支付。

## 3.1 存储函数与内外耗散性的桥梁

### 3.1.1 作为状态空间性质的耗散性

第 2 章把 dissipativity 定义成输入输出性质：

$$\int_0^T w(u(t), y(t)) dt \geq 0.$$

第 3 章要回答：如果系统有状态  $x$ ，这个外部不等式能不能写成内部储能不等式？内部形式是：

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} w(u(t), y(t)) dt \geq \phi(x(t_1)).$$

本节只是章节导入，但它是全书关键转折：从 input-output theory 进入 state-space theory。

**为什么这个转折重要。** 输入输出不等式适合黑箱系统。状态空间储能函数适合 Lyapunov 稳定证明。若能证明二者等价，我们就能用输入输出性质推出状态稳定。这正是后面第 6 章稳定性定理的基础。

### 3.1.2 状态空间模型

定义状态空间模型、transition map、readout map、reachable/controllable states、能量函数  $E$ ，以及 cyclo-dissipativity。

**状态的意义。** 输入输出模型  $y = Gu$  把整个过去输入历史折叠进算子  $G$ 。状态空间模型则引入  $x(t)$ ，让  $x(t)$  记录“为了预测未来所需的过去信息”。也就是说，若知道当前状态  $x(t)$  和未来输入  $u(\tau), \tau \geq t$ ，就能决定未来输出。

**transition map。** 作者定义 transition map:

$$\psi(t_0, t_1, x_0, u).$$

含义:

- 初始时间:  $t_0$ 。
- 终止时间:  $t_1$ 。
- 初始状态:  $x(t_0) = x_0$ 。
- 输入历史:  $u$ 。
- 输出: 终止状态  $x(t_1)$ 。

所以

$$x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x_0, u).$$

**transition map 的性质。** 初态一致性:

$$\psi(t_0, t_0, x_0, u) = x_0.$$

因为没有经过时间，状态不变。因果性: 若  $u_1, u_2$  在  $[t_0, t_1]$  上相同，则

$$\psi(t_0, t_1, x_0, u_1) = \psi(t_0, t_1, x_0, u_2).$$

终止状态不能依赖  $t_1$  之后的未来输入。半群性质:

$$\psi(t_1, t_2, \psi(t_0, t_1, x_0, u), u) = \psi(t_0, t_2, x_0, u).$$

逐步解释:

1. 从  $t_0$  到  $t_1$ ，状态变为  $\psi(t_0, t_1, x_0, u)$ 。
2. 以这个状态为初态，从  $t_1$  到  $t_2$ 。
3. 结果应等于直接从  $t_0$  到  $t_2$ 。

无偏性:

$$\psi(t_0, t, 0, 0) = 0.$$

零输入零初态保持零状态。时不变性: 时间整体平移不改变系统行为。

**readout map**。输出由

$$y(t) = r(x(t), u(t))$$

给出。这里  $r$  是 readout map。它只依赖当前状态和当前输入，不显式依赖过去输入，因为过去已经由  $x(t)$  编码。

**零初态输入输出模型与非零初态模型**。若只说  $y = Gu$ ，通常默认系统从标准静止状态开始，即  $x(0) = 0$ 。若允许任意初态  $x_0$ ，更准确的写法是

$$y = G(x_0)u.$$

这里  $G(x_0)$  是一族输入输出算子，按初态参数化。这解释了第 2 章 weak dissipativity：若  $G(0)$  dissipative，非零初态  $G(x_0)$  通常只 weakly dissipative。

**controllable 和 reachable**。controllable at  $t_0$ ：状态  $x_0$  能在未来被驱动到 0。存在  $t_1 \geq t_0$  和输入  $u$ ，使

$$\psi(t_0, t_1, x_0, u) = 0.$$

reachable at  $t_0$ ：状态  $x_0$  能从过去的零状态到达。存在  $t_{-1} \leq t_0$  和输入  $u$ ，使

$$\psi(t_{-1}, t_0, 0, u) = x_0.$$

线性有限维时，reachability 和 controllability 在很多标准条件下等价；一般非线性系统不等价。

**能量输入函数  $E$** 。连续时间：

$$E(x_0, u, y, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [y(t)^T Q y(t) + 2y(t)^T S u(t) + u(t)^T R u(t)] dt.$$

这里  $x_0$  被列入参数，因为非零初态会影响同一个输入  $u$  产生的输出  $y$ 。离散时间：

$$E(x_0, u, y, t_0, t_1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [y(t)^T Q y(t) + 2y(t)^T S u(t) + u(t)^T R u(t)].$$

**为什么离散时间求和不到  $t_1$** 。需要时间分解：

$$E(x_0, u, y, t_0, t_2) = E(x_0, u, y, t_0, t_1) + E(x(t_1), u, y, t_1, t_2).$$

如果第一段求和包含  $t_1$ ，第二段也包含  $t_1$ ，则  $t_1$  的供给率被计算两次。为了避免双重计数，离散求和到  $t_1 - 1$ 。连续时间单点不影响普通积分，所以问题不明显；但若有冲激项，仍要小心“到但不包括终点”的约定。

**external dissipativity**。零初态 external dissipativity:

$$E(0, u, y, 0, T) \geq 0, \quad \forall u, \forall T \geq 0.$$

这里  $x(0) = 0$ 。

**cyclodissipativity**。系统  $G(0)$  cyclodissipative, 若

$$E(0, u, y, 0, T) \geq 0$$

对所有使

$$x(T) = 0$$

的输入成立。也就是说，只要求从零状态出发又回到零状态的“循环轨迹”供给非负。因为只检查循环，所以比 dissipativity 弱。

### 3.1.3 存储函数

定义 virtual storage function、storage function、required supply、available storage，并证明它们的基本关系。

**virtual storage function**。函数

$$\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$$

是 virtual storage function, 若

$$\phi(0) = 0$$

且对所有  $t_1 \geq t_0$ 、所有初态  $x(t_0)$ 、所有输入  $u$ ，有

$$\phi(x(t_0)) + E(x(t_0), u, y, t_0, t_1) \geq \phi(x(t_1)).$$

它是“virtual”的原因：不要求  $\phi(x) \geq 0$ 。因此它可以取负值，不一定像真实能量。

**storage function**。若 virtual storage function 还满足

$$\phi(x) \geq 0, \quad \forall x \in X,$$

则称为 storage function。storage function 才能被直接看作 Lyapunov-like energy。

**required supply**  $\phi_r$ 。定义：

$$\phi_r(x_0) = \inf E(0, u, y, t_{-1}, t_0),$$

约束：

$$x(t_{-1}) = 0, \quad x(t_0) = x_0.$$

解释：从零状态到  $x_0$  的所有可行路径中，供给量的最小值。如果  $x_0$  不 reachable，则没有可行路径，作者约定  $\inf$  为  $+\infty$ 。

**virtual available storage**  $\phi_a^*$ 。定义：

$$\phi_a^*(x_0) = -\inf E(x_0, u, y, t_0, t_1),$$

约束：

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = 0.$$

解释：从  $x_0$  回到零状态时，系统最多能向外“交出”多少供给。因为  $E$  是输入给系统的供给，若  $E$  很负，代表系统向外释放很多供给。取负号后成为可用储能。

**available storage**  $\phi_a$ 。定义：

$$\phi_a(x_0) = -\inf E(x_0, u, y, t_0, t_1),$$

但最终状态不约束。区别：

- $\phi_a^*$ ：最终必须到 0。
- $\phi_a$ ：最终状态任意。

由于  $\phi_a$  优化约束更少，所以

$$\phi_a(x) \geq \phi_a^*(x)$$

通常成立。

**引理 1**。引理 1 说：

1. 若  $x_0$  reachable，则  $\phi_r(x_0) < \infty$ 。
2. 若  $x_0$  controllable，则  $\phi_a^*(x_0) > -\infty$ 。

这是直接由定义得到。reachable 保证至少有一条路径从 0 到  $x_0$ ，所以 required supply 不会因为无路径而是  $+\infty$ 。controllable 保证至少有路径从  $x_0$  到 0。

**引理 2 逐步证明。** 假设系统 *cyclodissipative*。取一个状态  $x_0$ ，假设它 *reachable* 且 *controllable*。则存在轨迹：

$$0 \rightarrow x_0 \rightarrow 0.$$

把总时间分成两段：第一段能量：

$$E_1 = E(0, u, y, t_{-1}, t_0).$$

第二段能量：

$$E_2 = E(x_0, u, y, t_0, t_1).$$

因为整条轨迹从 0 回到 0，*cyclodissipativity* 给出

$$E_1 + E_2 \geq 0.$$

移项：

$$E_1 \geq -E_2.$$

对第一段所有可行路径取 *inf*：

$$\inf E_1 = \phi_r(x_0).$$

对第二段所有可行路径取 *inf*：

$$\inf E_2 = -\phi_a^*(x_0).$$

直观地，把  $E_1 + E_2 \geq 0$  在最优意义下写成：

$$\phi_r(x_0) - \phi_a^*(x_0) \geq 0.$$

所以

$$\phi_r(x_0) \geq \phi_a^*(x_0).$$

特别地，对  $x_0 = 0$ ，零输入零轨迹给出供给 0，所以

$$\phi_r(0) \leq 0,$$

同时

$$\phi_a^*(0) \geq 0.$$

又有

$$\phi_r(0) \geq \phi_a^*(0).$$

三者合并，只能是

$$\phi_r(0) = \phi_a^*(0) = 0.$$

**引理 3 逐步证明。** 假设系统 dissipative。取从 0 到  $x_0$ ，再从  $x_0$  到任意最终状态的轨迹。因为系统从零初态出发完整 dissipative，对任意最终状态：

$$E_1 + E_2 \geq 0.$$

同理可得

$$\phi_r(x_0) \geq \phi_a(x_0).$$

再证明  $\phi_a(x_0) \geq 0$ 。根据定义：

$$\phi_a(x_0) = - \inf_{u, t_1} E(x_0, u, y, t_0, t_1).$$

允许选择  $t_1 = t_0$ ，此时积分区间为空：

$$E(x_0, u, y, t_0, t_0) = 0.$$

所以 inf 至少不大于 0：

$$\inf E \leq 0.$$

两边乘以负号，方向反转：

$$- \inf E \geq 0.$$

即

$$\phi_a(x_0) \geq 0.$$

因此

$$\phi_r(x) \geq \phi_a(x) \geq 0.$$

**引理 4：这些候选函数真的是储能函数。** 以  $\phi_r$  为例。要证明：

$$\phi_r(x_0) + E(x_0, u, y, t_0, t_1) \geq \phi_r(x_1).$$

根据  $\phi_r(x_1)$  的定义，它是从 0 到  $x_1$  的最小供给。如果我们选一条从 0 到  $x_0$  的路径，再接上一条从  $x_0$  到  $x_1$  的路径，那么这是一条从 0 到  $x_1$  的可行路径。因此

$$\phi_r(x_1) \leq E(0 \rightarrow x_0) + E(x_0 \rightarrow x_1).$$

对从 0 到  $x_0$  的第一段取 inf:

$$\phi_r(x_1) \leq \phi_r(x_0) + E(x_0 \rightarrow x_1).$$

移项得到:

$$\phi_r(x_0) + E(x_0 \rightarrow x_1) \geq \phi_r(x_1).$$

这正是 storage inequality。

### 3.1.4 外部耗散与内部耗散的关系

给出本章最重要的等价定理：external dissipativity 与存在 storage function 等价。

**定理 1 陈述。** 系统 dissipative 当且仅当存在 storage function  $\phi$ , 且对所有 reachable 状态:

$$0 \leq \phi(x) < \infty.$$

**dissipative 推出 storage function。** 若系统 dissipative, 上一节引理 3 和引理 4 已经证明  $\phi_a$  和  $\phi_r$  都是 storage functions, 且有非负性和有限性条件。

**storage function 推出 dissipative。** 假设存在 storage function  $\phi$ . 从零状态开始:

$$x(t_0) = 0.$$

storage inequality:

$$\phi(x(t_0)) + E(x(t_0), u, y, t_0, t_1) \geq \phi(x(t_1)).$$

代入  $x(t_0) = 0$ :

$$\phi(0) + E(0, u, y, t_0, t_1) \geq \phi(x(t_1)).$$

由定义:

$$\phi(0) = 0.$$

所以

$$E(0, u, y, t_0, t_1) \geq \phi(x(t_1)).$$

因为  $\phi$  是 storage function:

$$\phi(x(t_1)) \geq 0.$$

因此

$$E(0, u, y, t_0, t_1) \geq 0.$$

这就是 external dissipativity。

**非零初态和 weak dissipativity。** 若初始状态为  $x_0$ , storage inequality:

$$\phi(x_0) + E(x_0, u, y, t_0, t_1) \geq \phi(x(t_1)).$$

因为  $\phi(x(t_1)) \geq 0$ , 所以

$$\phi(x_0) + E(x_0, u, y, t_0, t_1) \geq 0.$$

写成:

$$E(x_0, u, y, t_0, t_1) + \beta \geq 0, \quad \beta = \phi(x_0).$$

这正是第 2 章 weak dissipativity 的解释。

**定理 2。** 系统 cyclo-dissipative 当且仅当存在 virtual storage function  $\phi$ , 并在既 controllable 又 reachable 的状态上有限。证明方向和定理 1 类似。关键差别是: virtual storage function 不要求非负, 因此只能推出闭合轨迹能量非负。若  $x(t_0) = x(t_1) = 0$ , 则

$$\phi(0) + E \geq \phi(0).$$

两边减去  $\phi(0)$ :

$$E \geq 0.$$

**定理 3。** 如果  $G(0)$  cyclo-dissipative, 那么  $G(x_0)$  对任意可达且可控  $x_0$  也 cyclo-dissipative。证明: 对从  $x_0$  出发又回到  $x_0$  的轨迹,

$$\phi(x_0) + E \geq \phi(x_0).$$

两边减去  $\phi(x_0)$ :

$$E \geq 0.$$

所以 cyclo-dissipativity 对循环初态不依赖具体  $x_0$ 。

**定理 4: UVD 和 cyclodissipativity.** 定理 4 需要两个条件:

1. 无偏性: 零输入零初态保持零输出, 即  $G(0)0 = 0$ 。
2. 一种 observability: 若  $u \in K(G(0))$ , 零初态响应满足  $x(t) \rightarrow 0$ 。

UVD 写成:

$$E(0, u, y, t_0, \infty) \geq 0.$$

若输入让系统从 0 到 0, 并且  $t_1$  后输入为 0, 则无偏性保证  $t_1$  后状态输出保持 0。因此

$$E(0, u, y, t_0, \infty) = E(0, u, y, t_0, t_1).$$

所以 UVD 推出 cyclodissipativity。反向: 若 cyclodissipative, 对任意  $u \in K(G)$ , observability 给出  $x(t) \rightarrow 0$ 。把  $t_1 \rightarrow \infty$ , 闭合条件在极限中满足, 从而得到 UVD。

### 3.1.5 存储函数的上下界

说明 storage functions 通常不唯一, 但有最大最小边界。

**定理 5: 凸性.** 若  $\phi_1, \phi_2$  是 storage functions, 定义

$$\phi_\alpha = \alpha\phi_1 + (1 - \alpha)\phi_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

对  $\phi_1$ :

$$\phi_1(x_0) + E \geq \phi_1(x_1).$$

乘以  $\alpha$ :

$$\alpha\phi_1(x_0) + \alpha E \geq \alpha\phi_1(x_1).$$

对  $\phi_2$ :

$$\phi_2(x_0) + E \geq \phi_2(x_1).$$

乘以  $1 - \alpha$ :

$$(1 - \alpha)\phi_2(x_0) + (1 - \alpha)E \geq (1 - \alpha)\phi_2(x_1).$$

相加:

$$\alpha\phi_1(x_0) + (1 - \alpha)\phi_2(x_0) + E \geq \alpha\phi_1(x_1) + (1 - \alpha)\phi_2(x_1).$$

所以

$$\phi_\alpha(x_0) + E \geq \phi_\alpha(x_1).$$

非负性也由凸组合保持。因此  $\phi_\alpha$  是 storage function。

**定理 6: dissipative storage bounds.** 任意 storage function  $\phi$  满足

$$0 \leq \phi_a(x) \leq \phi(x) \leq \phi_r(x).$$

上界：从 0 到  $x$ ：

$$\phi(0) + E(0 \rightarrow x) \geq \phi(x).$$

$$E(0 \rightarrow x) \geq \phi(x).$$

对所有路径取 inf：

$$\phi_r(x) \geq \phi(x).$$

下界：从  $x$  到任意最终状态：

$$\phi(x) + E(x \rightarrow x_1) \geq \phi(x_1) \geq 0.$$

所以

$$\phi(x) \geq -E(x \rightarrow x_1).$$

对所有路径取最大可抽取供给：

$$\phi(x) \geq \phi_a(x).$$

再由引理 3：

$$\phi_a(x) \geq 0.$$

**定理 7: cyclodissipative bounds.** 任意 virtual storage function 满足

$$\phi_a^*(x) \leq \phi(x) \leq \phi_r(x).$$

证明和定理 6 类似，但下界只允许从  $x$  回到 0，所以出现  $\phi_a^*$  而不是  $\phi_a$ 。

### 3.1.6 正存储函数

讨论何时 storage function 正定，即

$$\phi(x) > 0, \quad x \neq 0.$$

**假设 1.** 供给率  $w(u, y)$  满足：对任意  $y \neq 0$ ，存在  $u = k(y)$ ，且  $k(0) = 0$ ，使

$$w(k(y), y) < 0.$$

直觉：供给率不是自动非负的；只要输出非零，就可以选择输入让供给率为负。

**推导。** 取输入

$$u(t) = k(y(t)).$$

storage inequality:

$$\phi(x_0) + \int_0^{t_1} w(k(y(t)), y(t)) dt \geq \phi(x(t_1)).$$

因为  $\phi(x(t_1)) \geq 0$ :

$$\phi(x_0) \geq - \int_0^{t_1} w(k(y(t)), y(t)) dt.$$

若  $y(t) \neq 0$  在某段时间存在，则

$$w(k(y(t)), y(t)) < 0$$

在那段时间成立，因此右侧严格正。若  $y(t) = 0$  对所有  $t > 0$ ，并且系统 observable，则初始状态只能是

$$x_0 = 0.$$

所以若  $x_0 \neq 0$ ，必有

$$\phi(x_0) > 0.$$

### 3.1.7 无损系统

定义 lossless/cyclolossless，并证明 storage function 唯一。

**定义。** cyclolossless 若存在 virtual storage function 使

$$\phi(x(t_0)) + E(t_0, t_1) = \phi(x(t_1))$$

对所有轨迹成立。若还满足

$$\phi(x) \geq 0,$$

则 lossless。

**定理 8.** lossless 或 cyclolossless 系统的 storage function 或 virtual storage function 唯一。证明思路：取从 0 到  $x$  的轨迹。等式给出

$$\phi(0) + E(0 \rightarrow x) = \phi(x).$$

因为  $\phi(0) = 0$ ：

$$E(0 \rightarrow x) = \phi(x).$$

所以 required supply 必须等于  $\phi(x)$ ：

$$\phi_r(x) = \phi(x).$$

同理，从  $x$  到 0 也给出 available storage 等于同一函数。上下界完全重合，无法有第二个 storage function。

### 3.1.8 更一般的能量函数

说明第 3 章的结果不依赖  $E$  是二次型积分，只依赖时间可加性。

**时间分解性质。** 核心条件是：

$$E(x_0, u, y, t_0, t_2) = E(x_0, u, y, t_0, t_1) + E(x(t_1), u, y, t_1, t_2).$$

第 3 章的 required supply、available storage、storage inequality 证明都只使用这个性质。

**为什么后面仍坚持二次型。** 一般  $E$  理论更宽，但不易计算。二次型供给率能带来：

1. 第 5 章的代数方程。
2. 线性系统 Riccati/KYP 条件。
3. 第 8 章频域  $M(s) \geq 0$  判据。

所以本章一般结论很广，但后续为了得到 explicit results，会回到二次型。

## 第四章 无源、正实与代数判据

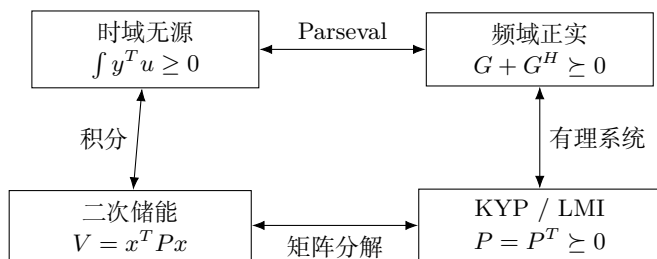


图 4.1 无源性、正实性、KYP 型方程和存储函数的对应关系。

本章是全书的计算核心。无源系统对应  $Q = 0, S = \frac{1}{2}I, R = 0$  的供给率；线性无源系统在频域对应正实传递函数；有限维状态空间中，这一性质又对应一个矩阵不等式或矩阵分解。非线性输入仿射系统中，同样思想表现为“供给率减去储能导数可以写成平方项”。

**定理 4.1 (微分耗散不等式的正规写法)** . 若存储函数  $\phi$  可微，状态轨迹绝对连续，供给率局部可积，则积分耗散不等式等价于沿轨迹几乎处处成立的

$$\dot{\phi}(x(t)) \leq w(u(t), y(t)).$$

若  $\phi$  不可微，应使用右上 Dini 导数或  $\limsup$  导数替代普通导数。

**评注 4.2 (它不是要求供给率非负)** . 式子  $\dot{\phi} \leq w$  中右端可以为负。此时系统正在向外放能，但左端必须更小或相等，表示内部储能下降足以支付对外输出和内部耗散。

### 4.1 无源系统、强无源性与正实性

#### 4.1.1 本章概览

这一节告诉读者：前两章很抽象，现在先回到熟悉的 passive systems。全章的作用是把 passivity 作为 dissipativity 的特例重新看一遍。

passivity 对应的  $(Q, S, R)$ 。passivity 常写为

$$\langle u, y \rangle_T \geq 0.$$

本书的耗散不等式标准形式为

$$\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq 0.$$

取

$$Q = 0, \quad S = I, \quad R = 0,$$

则

$$\langle y, Qy \rangle_T = 0,$$

$$2\langle y, Su \rangle_T = 2\langle y, Iu \rangle_T = 2\langle y, u \rangle_T,$$

$$\langle u, Ru \rangle_T = 0.$$

所以标准耗散不等式变成

$$2\langle y, u \rangle_T \geq 0.$$

因为 2 是正数, 等价于

$$\langle y, u \rangle_T \geq 0.$$

因此 passivity 是  $(0, I, 0)$  dissipativity。若某些作者用不带 2 的二次供给率约定, 也可写  $(0, \frac{1}{2}I, 0)$ , 没有实质差别。

**cyclopassivity**。cyclopassivity 就是  $(0, I, 0)$  cyclodissipativity: 只要求回到初始状态的循环轨迹供给非负。

**本章为什么存在**。作者说本章没有太多新结果, 因为这些结果都是后面一般定理的特例。但先回顾 passivity 可以帮助读者理解:

- strong passivity 为什么需要。
- KYP lemma 是 storage function 的线性特例。
- frequency-domain positive real condition 是第 8 章  $M(s) \geq 0$  的特例。
- single-loop passive stability 是第 6 章互联稳定的特例。

#### 4.1.2 无源性与稳定性

说明 passivity 与 stability 的关系, 以及普通 passivity 为什么不够强。

**passivity 不等式**。系统  $y = Gu$  passive, 若

$$\langle u, Gu \rangle_T \geq 0$$

对所有输入和所有  $T > 0$  成立。因为  $y = Gu$ , 也可写成

$$\langle u, y \rangle_T \geq 0.$$

若是连续时间  $L_2$  内积:

$$\langle u, y \rangle_T = \int_0^T u(t)^T y(t) dt.$$

**线性系统极点直觉。** 对线性 passive system, 其 transfer function 的极点在闭左半平面:

$$\operatorname{Re} s \leq 0.$$

闭左半平面包括虚轴。虚轴极点对应不衰减振荡, 例如理想 LC 电路。因此 passive 不一定 finite-gain stable, 也不一定 asymptotically stable。

**hidden modes。** 输入输出 transfer function 只描述可控且可观测部分。如果有不可观测不稳定状态, 它不会出现在  $G$  中, 但内部状态仍不稳定。因此从 passivity 推出 state-space stability 需要额外假设:

- reachability/controllability: 所有状态能被输入影响。
- observability/ZSD: 所有状态能在输出中被看见。

**strong passivity。** 为了排除虚轴边界情况, 要让系统不只是“不产能”, 还要“严格吸收某个输入或输出方向的能量”。这就是 4.5 的 OSP、ISP、VSP。

### 4.1.3 内部无源性与外部无源性

用线性系统说明 external passivity 和 internal storage function 的关系, 也就是 Positive Real 引理或 KYP 引理。

**状态方程。** 原文模型:

$$\dot{x} = Fx + Gu,$$

$$y = H^T x + Ju.$$

维度:

- $x \in \mathbb{R}^n$ 。
- $u, y \in \mathbb{R}^m$ 。
- $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。
- $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 。
- $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 。
- $J \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 。

二次 storage function。取

$$\phi(x) = x^T P x, \quad P = P^T > 0.$$

求导:

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}.$$

代入  $\dot{x} = Fx + Gu$ :

$$\dot{x}^T P x = (Fx + Gu)^T P x = x^T F^T P x + u^T G^T P x,$$

$$x^T P \dot{x} = x^T P (Fx + Gu) = x^T P F x + x^T P G u.$$

相加:

$$\dot{\phi} = x^T (F^T P + P F) x + u^T G^T P x + x^T P G u.$$

因为

$$u^T G^T P x = (x^T P G u)^T = x^T P G u$$

是同一标量, 所以

$$\dot{\phi} = x^T (F^T P + P F) x + 2x^T P G u.$$

passivity 微分条件。使用供给率  $2y^T u$ 。internal passivity 微分形式:

$$2y^T u - \dot{\phi} \geq 0.$$

输出:

$$y = H^T x + J u.$$

先展开  $2y^T u$ :

$$2y^T u = 2(H^T x + J u)^T u.$$

分配:

$$2(H^T x)^T u + 2(J u)^T u.$$

第一项:

$$2(H^T x)^T u = 2x^T H u.$$

第二项:

$$2(Ju)^T u = 2u^T J^T u.$$

所以

$$2y^T u - \dot{\phi} = 2x^T H u + 2u^T J^T u - x^T (F^T P + P F)x - 2x^T P G u.$$

把交叉项合并:

$$2x^T H u - 2x^T P G u = 2x^T (H - P G)u.$$

二次型块矩阵为

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -F^T P - P F & H - P G \\ H^T - G^T P & J + J^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \geq 0.$$

这就是 KYP lemma 的核心矩阵不等式。原文 OCR 中块矩阵和  $L, W$  因式分解排版错位, 但意思是该块矩阵可写成某个矩阵乘其转置, 因此非负。

**为什么解不唯一。** 若有两个  $P_1, P_2$  满足 storage inequality, 则任意凸组合

$$\alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2$$

也对应 storage function:

$$x^T [\alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2] x = \alpha x^T P_1 x + (1 - \alpha) x^T P_2 x.$$

这 and 第 3 章 storage functions convex set 完全一致。

#### 4.1.4 频域中的无源性

把线性 passive system 的时域积分不等式转换为频域 positive real 条件。

**频域正实条件。** 若系统 transfer function 为  $G(s)$ , passivity 对应

$$G(s) + G(s)^* \geq 0, \quad \text{Re } s \geq 0.$$

这里  $G(s)^*$  是复共轭转置。若  $G$  是标量, 则是复共轭。在虚轴上  $s = j\omega$ , 实系数系统满足

$$G(j\omega)^* = G(-j\omega)^T.$$

所以边界条件为

$$G(j\omega) + G(-j\omega)^T \geq 0.$$

**为什么还需要极点条件。** 只检查虚轴不够, 因为 positive real 要求整个右半平面。若  $G(s)$  在右半平面有极点, 靠近极点时  $G(s)$  无界, 正实条件会被破坏。原文用简单极点说明。设标量  $G$  在  $s_0$  附近:

$$G(s) \approx \frac{a}{s - s_0}.$$

令

$$s - s_0 = \rho e^{j\theta}.$$

则

$$G(s) \approx \frac{a}{\rho e^{j\theta}} = \frac{a}{\rho} e^{-j\theta}.$$

若  $a$  实数:

$$G(s) + G(s)^* \approx \frac{a}{\rho} e^{-j\theta} + \frac{a}{\rho} e^{j\theta}.$$

利用

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos \theta,$$

得到

$$G(s) + G(s)^* \approx \frac{2a}{\rho} \cos \theta.$$

当  $\theta$  改变时,  $\cos \theta$  可正可负。因此极点位置和留数符号必须受限制。

**易错点。** Parseval theorem 不能无条件使用。对 passive systems 该转换成立, 但对一般 dissipative systems, 频域条件需要更精细的定理, 第 8 章才会证明。

#### 4.1.5 强无源性

定义三种强无源性: OSP、ISP、VSP, 并说明它们和  $(Q, S, R)$  的对应关系。

**为什么严格不等式不够。** 若尝试定义:

$$\langle u, y \rangle_T > 0,$$

则当  $u = 0$  或  $y = 0$  时左边为 0, 不可能严格大于 0。正确做法是要求左边大于某个范数平方。

**OSP**。 output strongly passive:

$$2\langle u, y \rangle_T \geq \epsilon_1 \|y\|_T^2, \quad \epsilon_1 > 0.$$

移项:

$$-\epsilon_1 \|y\|_T^2 + 2\langle y, u \rangle_T \geq 0.$$

对应

$$(Q, S, R) = (-\epsilon_1 I, I, 0).$$

**ISP**。 input strongly passive:

$$2\langle u, y \rangle_T \geq \epsilon_2 \|u\|_T^2.$$

移项:

$$2\langle y, u \rangle_T - \epsilon_2 \|u\|_T^2 \geq 0.$$

对应

$$(Q, S, R) = (0, I, -\epsilon_2 I).$$

**VSP**。 very strongly passive:

$$2\langle u, y \rangle_T \geq \epsilon_1 \|y\|_T^2 + \epsilon_2 \|u\|_T^2.$$

移项:

$$-\epsilon_1 \|y\|_T^2 + 2\langle y, u \rangle_T - \epsilon_2 \|u\|_T^2 \geq 0.$$

对应

$$(Q, S, R) = (-\epsilon_1 I, I, -\epsilon_2 I).$$

**ISP + finite gain 推出 VSP**。 假设 ISP:

$$2\langle u, y \rangle_T \geq \epsilon_2 \|u\|_T^2.$$

假设 finite gain:

$$\|y\|_T \leq k \|u\|_T.$$

平方:

$$\|y\|_T^2 \leq k^2 \|u\|_T^2.$$

乘以  $\alpha > 0$ :

$$\alpha \|y\|_T^2 \leq \alpha k^2 \|u\|_T^2.$$

若

$$0 < \alpha < \frac{\epsilon_2}{k^2},$$

则

$$\epsilon_2 - \alpha k^2 > 0.$$

从 ISP:

$$2\langle u, y \rangle_T \geq \epsilon_2 \|u\|_T^2$$

写作

$$\epsilon_2 \|u\|_T^2 = \alpha k^2 \|u\|_T^2 + (\epsilon_2 - \alpha k^2) \|u\|_T^2.$$

因为

$$\alpha k^2 \|u\|_T^2 \geq \alpha \|y\|_T^2,$$

得到

$$2\langle u, y \rangle_T \geq \alpha \|y\|_T^2 + (\epsilon_2 - \alpha k^2) \|u\|_T^2.$$

这就是 VSP。

#### 4.1.6 单环反馈稳定性结果

说明两个强无源子系统构成单环反馈时，如何得到稳定性。

**子系统耗散不等式。** 子系统 1:

$$-\epsilon_{11} \|y_1\|_T^2 + 2\langle y_1, u_1 \rangle_T - \epsilon_{21} \|u_1\|_T^2 \geq 0.$$

子系统 2:

$$-\epsilon_{12} \|y_2\|_T^2 + 2\langle y_2, u_2 \rangle_T - \epsilon_{22} \|u_2\|_T^2 \geq 0.$$

**互联。**

$$u_1 = u_{e1} - y_2,$$

$$u_2 = u_{e2} + y_1.$$

若外部输入为零：

$$u_1 = -y_2, \quad u_2 = y_1.$$

**零外部输入下逐步相加。** 第一个 storage inequality：

$$\phi_1(x_1(0)) + 2\langle y_1, u_1 \rangle_T - \epsilon_{11}\|y_1\|_T^2 - \epsilon_{21}\|u_1\|_T^2 \geq \phi_1(x_1(T)).$$

代入  $u_1 = -y_2$ ：

$$\phi_1(x_1(0)) - 2\langle y_1, y_2 \rangle_T - \epsilon_{11}\|y_1\|_T^2 - \epsilon_{21}\|y_2\|_T^2 \geq \phi_1(x_1(T)).$$

第二个：

$$\phi_2(x_2(0)) + 2\langle y_2, u_2 \rangle_T - \epsilon_{12}\|y_2\|_T^2 - \epsilon_{22}\|u_2\|_T^2 \geq \phi_2(x_2(T)).$$

代入  $u_2 = y_1$ ：

$$\phi_2(x_2(0)) + 2\langle y_2, y_1 \rangle_T - \epsilon_{12}\|y_2\|_T^2 - \epsilon_{22}\|y_1\|_T^2 \geq \phi_2(x_2(T)).$$

相加。由于

$$\langle y_1, y_2 \rangle_T = \langle y_2, y_1 \rangle_T$$

在实内积下成立，交叉项抵消：

$$-2\langle y_1, y_2 \rangle_T + 2\langle y_2, y_1 \rangle_T = 0.$$

得到

$$\phi_1(x_1(0)) + \phi_2(x_2(0)) - (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})\|y_1\|_T^2 - (\epsilon_{12} + \epsilon_{21})\|y_2\|_T^2 \geq \phi_1(x_1(T)) + \phi_2(x_2(T)).$$

定义整体储能：

$$\phi(x) = \phi_1(x_1) + \phi_2(x_2).$$

则

$$\phi(x(0)) - \phi(x(T)) \geq (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})\|y_1\|_T^2 + (\epsilon_{12} + \epsilon_{21})\|y_2\|_T^2.$$

如果

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} > 0, \quad \epsilon_{12} + \epsilon_{21} > 0,$$

则输出能量受到初始储能约束。若输出趋零能推出状态趋零，例如各子系统 observable，则整体渐近稳定。稳定成立的典型条件包括：

1. 一个子系统 passive，另一个 VSP。
2. 两个子系统都 ISP。
3. 两个子系统都 OSP。

这些都是后面第 6 章一般互联稳定定理的特例。

## 4.2 代数耗散判据：从微分不等式到矩阵条件

### 4.2.1 本章概览

前面已经说明什么是耗散系统，以及为什么无源性和耗散性能够导出稳定性。接下来要处理一个更接近计算与设计的问题：给定一个具体系统，怎样判断它是不是  $(Q, S, R)$ -dissipative？也就是说，前面的定义是：

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} w(y(t), u(t)) dt \geq \phi(x(t_1)),$$

其中供给率为

$$w(y, u) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u.$$

可是对一个实际系统，仅仅拿着这个积分不等式并不好检验。第 5 章的任务就是把这个不等式改写成更可计算的代数/微分方程条件。

**本章为什么重要。** 第 5 章是全书从“概念定义”进入“判据计算”的转折点。在控制工程中，一个判据有用，通常不只是因为它优美，而是因为它能变成以下对象之一：

1. 方程：求某个函数或矩阵是否满足方程。
2. 不等式：求某个矩阵是否半正定。
3. Riccati 方程或 LMI：可用成熟数值工具处理。

本章要做的正是这件事。Moylan 先考虑一类非线性系统，它对输入  $u$  是线性的；之后再把线性系统作为特例，得到矩阵条件；最后简短讨论离散时间系统。

**本章系统类别。** 本章主要处理连续时间系统：

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + G(x(t))u(t),$$

$$y(t) = h(x(t)) + J(x(t))u(t).$$

这里每个符号的含义是：

- $t$ : 连续时间变量。
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ : 状态向量,  $n$  是状态维数。
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ : 输入向量,  $m$  是输入端口或控制通道数。
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ : 输出向量,  $p$  是输出通道数。
- $\dot{x}(t)$  表示  $x(t)$  对时间  $t$  的导数, 即  $dx(t)/dt$ 。
- $f(x) \in \mathbb{R}^n$ : 无输入时的状态漂移项。
- $G(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ : 输入如何作用到状态方程的矩阵函数。
- $h(x) \in \mathbb{R}^p$ : 无直接输入时的输出函数。
- $J(x) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ : 输入到输出的直接通道, 也叫 feedthrough 或 direct transmission term。

“对输入线性”指的是：当  $x$  固定时，右侧关于  $u$  至多是一阶的。也就是说，状态方程里没有  $u^2$ 、 $\sin u$ 、 $u_1 u_2$  这种非线性输入项。为什么这个限制关键？因为供给率本身是关于  $u$  的二次型。若系统对  $u$  线性，那么把  $y = h + Ju$  代入供给率后，整个表达式仍然是关于  $u$  的二次函数。二次函数可以通过“配方”或矩阵半正定分解处理，这就是代数条件出现的根源。

**本章结论的预告。** 对这类系统，如果存在一个虚拟储能函数  $\phi(x)$ ，则它必须满足一组三个方程：

$$\nabla\phi^T f = h^T Q h - \ell^T \ell,$$

$$\frac{1}{2} \nabla\phi^T G = h^T (QJ + S) - \ell^T W,$$

$$R + J^T S + S^T J + J^T Q J = W^T W.$$

这里：

- $\phi(x)$  是 storage function 或 virtual storage function。
- $\nabla\phi$  是  $\phi$  对状态  $x$  的梯度。
- $\ell(x)$  是新引入的向量函数，用来表示不可恢复耗散项的一部分。
- $W(x)$  是新引入的矩阵函数。
- $(\ell + Wu)^T (\ell + Wu)$  是非负的平方项，它会成为“耗散掉的能量”。

第 5 章的核心思想可以压缩成一句话：把耗散不等式中的“ $\geq 0$ ”转化为一个平方项  $(\ell + Wu)^T (\ell + Wu)$ ，然后比较关于输入  $u$  的常数项、一次项、二次项。这一章后面所有公式，基本都围绕这句话展开。

### 4.2.2 一类非线性连续时间系统

本节从连续时间非线性系统出发，把积分形式的耗散不等式化成逐点的微分不等式，再把它展开成关于输入  $u$  的二次函数，最后通过“平方分解”得到三条关键方程。这一步是第 5 章最重要的推导基础。

1. 系统形式。原文考虑的系统是：

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + G(x(t))u(t),$$

$$y(t) = h(x(t)) + J(x(t))u(t).$$

为了减少公式拥挤，后面常把  $x(t)$ 、 $u(t)$ 、 $y(t)$  简写成  $x$ 、 $u$ 、 $y$ 。但要记住：它们本来都是时间  $t$  的函数。维度检查非常重要：

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R}^p.$$

于是：

$$f(x) \in \mathbb{R}^n, \quad G(x) \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$h(x) \in \mathbb{R}^p, \quad J(x) \in \mathbb{R}^{p \times m}.$$

因为  $G(x)u$  是  $n \times m$  矩阵乘  $m \times 1$  向量，所以  $G(x)u \in \mathbb{R}^n$ ，能与  $f(x)$  相加。因为  $J(x)u \in \mathbb{R}^p$ ，能与  $h(x)$  相加。供给率仍然是：

$$w(y, u) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u.$$

若  $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ， $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ， $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ，则：

- $y^T Q y$  是  $1 \times p$ 、 $p \times p$ 、 $p \times 1$  相乘，结果是标量。
- $y^T S u$  是  $1 \times p$ 、 $p \times m$ 、 $m \times 1$  相乘，结果是标量。
- $u^T R u$  是  $1 \times m$ 、 $m \times m$ 、 $m \times 1$  相乘，结果是标量。

所以  $w(y, u)$  是一个标量。它代表从外界供给给系统的“广义能量速率”，具体单位取决于  $u, y, Q, S, R$  的物理含义。对被动系统， $w = y^T u$ ，通常具有功率单位。

2. 从积分耗散不等式开始。storage function  $\phi(x)$  的耗散不等式是：

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} [y(t)^T Q y(t) + 2y(t)^T S u(t) + u(t)^T R u(t)] dt \geq \phi(x(t_1)).$$

把中括号里的供给率记为  $w(y(t), u(t))$ ，则：

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} w(y(t), u(t)) dt \geq \phi(x(t_1)).$$

这句话的物理意思是：最终储能  $\phi(x(t_1))$  不能超过初始储能  $\phi(x(t_0))$  加上外界输入的总能量。若把右侧移到左侧，也可以写成：

$$\phi(x(t_0)) - \phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} w(y(t), u(t)) dt \geq 0.$$

这里的非负量可以理解为系统内部不可逆损耗或至少是不被储存起来的能量余量。

**3. 从积分形式到微分形式。** 为了得到局部条件，考虑很短的时间区间：

$$t_1 = t + \delta t, \quad t_0 = t.$$

其中  $\delta t > 0$  是很小的时间增量。耗散不等式变为：

$$\phi(x(t)) + \int_t^{t+\delta t} w(y(\tau), u(\tau)) d\tau \geq \phi(x(t + \delta t)).$$

把  $\phi(x(t))$  移到右边：

$$\int_t^{t+\delta t} w(y(\tau), u(\tau)) d\tau \geq \phi(x(t + \delta t)) - \phi(x(t)).$$

两边除以  $\delta t$ ：

$$\frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} w(y(\tau), u(\tau)) d\tau \geq \frac{\phi(x(t + \delta t)) - \phi(x(t))}{\delta t}.$$

当  $\delta t \rightarrow 0^+$  时，如果  $w$  连续，左边趋向瞬时值：

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} w(y(\tau), u(\tau)) d\tau = w(y(t), u(t)).$$

右边趋向沿轨迹的时间导数：

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0^+} \frac{\phi(x(t + \delta t)) - \phi(x(t))}{\delta t} = \frac{d}{dt} \phi(x(t)).$$

于是得到微分形式：

$$w(y(t), u(t)) \geq \frac{d}{dt} \phi(x(t)).$$

展开  $w$ ：

$$y(t)^T Q y(t) + 2y(t)^T S u(t) + u(t)^T R u(t) \geq \frac{d}{dt} \phi(x(t)).$$

这一步把“任意时间区间上的积分不等式”变成“每个时刻都成立的瞬时功率不等式”。直观地说，外界给系统的瞬时功率不能小于储能增长的瞬时速率；差额就是耗散。

**4. 链式法则：**计算  $\frac{d}{dt}\phi(x(t))$ 。现在假设  $\phi(x)$  可微。这里有两个不同的导数，必须分清：

1.  $\nabla\phi(x)$ ： $\phi$  对状态  $x$  的梯度。
2.  $\frac{d}{dt}\phi(x(t))$ ：沿着系统轨迹  $x(t)$  的时间导数。

如果  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ，则：

$$\nabla\phi(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

沿轨迹的时间导数由链式法则给出：

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x(t)) \frac{dx_i(t)}{dt}.$$

用向量写法就是：

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t)) = \nabla\phi(x(t))^T \dot{x}(t).$$

代入状态方程：

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + G(x(t))u(t),$$

得到：

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t)) = \nabla\phi(x(t))^T [f(x(t)) + G(x(t))u(t)].$$

展开：

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t)) = \nabla\phi^T f + \nabla\phi^T Gu.$$

维度检查：

- $\nabla\phi^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 。
- $f \in \mathbb{R}^n$ ，所以  $\nabla\phi^T f$  是标量。
- $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ， $u \in \mathbb{R}^m$ ，所以  $Gu \in \mathbb{R}^n$ ， $\nabla\phi^T Gu$  也是标量。

5. 把  $y = h + Ju$  代入供给率。微分耗散不等式是：

$$y^T Qy + 2y^T Su + u^T Ru \geq \nabla \phi^T f + \nabla \phi^T Gu.$$

系统输出为：

$$y = h + Ju.$$

代入第一项：

$$y^T Qy = (h + Ju)^T Q(h + Ju).$$

先展开转置：

$$(h + Ju)^T = h^T + (Ju)^T.$$

因为  $(Ju)^T = u^T J^T$ ，所以：

$$(h + Ju)^T = h^T + u^T J^T.$$

因此：

$$(h + Ju)^T Q(h + Ju) = (h^T + u^T J^T) Q(h + Ju).$$

先乘右边：

$$Q(h + Ju) = Qh + QJu.$$

再左乘：

$$(h^T + u^T J^T)(Qh + QJu).$$

按分配律展开四项：

$$h^T Qh + h^T QJu + u^T J^T Qh + u^T J^T QJu.$$

如果  $Q = Q^T$ ，那么  $u^T J^T Qh$  是  $h^T QJu$  的转置。因为标量等于自己的转置：

$$u^T J^T Qh = (u^T J^T Qh)^T = h^T Q^T Ju = h^T QJu.$$

所以：

$$y^T Qy = h^T Qh + 2h^T QJu + u^T J^T QJu.$$

第二项：

$$2y^T Su = 2(h + Ju)^T Su.$$

展开转置：

$$2(h^T + u^T J^T)Su.$$

分配：

$$2h^T Su + 2u^T J^T Su.$$

第三项  $u^T Ru$  保持不变。于是左侧完整展开为：

$$h^T Qh + 2h^T QJu + u^T J^T QJu + 2h^T Su + 2u^T J^T Su + u^T Ru.$$

把右侧移到左侧：

$$h^T Qh + 2h^T QJu + u^T J^T QJu + 2h^T Su + 2u^T J^T Su + u^T Ru - \nabla\phi^T f - \nabla\phi^T Gu \geq 0.$$

这就是本节的关键不等式。

**6. 为什么可以把它看成关于  $u$  的二次函数。** 现在冻结在某个时刻  $t$ 。在这个瞬间：

- $x$  可以看成是一个固定的状态。
- $f(x), G(x), h(x), J(x), \nabla\phi(x)$  都是由这个  $x$  决定的固定量。
- $u$  可以被独立选择。

所以左侧是关于  $u$  的二次函数。按  $u$  的次数分组：常数项，也就是不含  $u$  的项：

$$h^T Qh - \nabla\phi^T f.$$

一次项，也就是含一个  $u$  的项：

$$2h^T QJu + 2h^T Su - \nabla\phi^T Gu.$$

二次项，也就是含两个  $u$  的项：

$$u^T J^T QJu + 2u^T J^T Su + u^T Ru.$$

注意  $2u^T J^T Su$  看起来不是标准  $u^T(\cdot)u$  形式，但它本身是标量，因此可以与转置对称化。因为：

$$u^T J^T Su$$

是标量，所以：

$$u^T J^T Su = (u^T J^T Su)^T = u^T S^T Ju.$$

因此：

$$2u^T J^T S u = u^T J^T S u + u^T S^T J u = u^T (J^T S + S^T J) u.$$

二次项合并为：

$$u^T (J^T Q J + J^T S + S^T J + R) u.$$

一次项也可以写成：

$$2h^T (QJ + S) u - \nabla \phi^T G u.$$

再把最后一项拆成  $2 \cdot \frac{1}{2}$ ：

$$-\nabla \phi^T G u = 2 \left( -\frac{1}{2} \nabla \phi^T G \right) u.$$

所以一次项为：

$$2 \left[ h^T (QJ + S) - \frac{1}{2} \nabla \phi^T G \right] u.$$

因此整个不等式等价于：

$$h^T Q h - \nabla \phi^T f + 2 \left[ h^T (QJ + S) - \frac{1}{2} \nabla \phi^T G \right] u + u^T (J^T Q J + J^T S + S^T J + R) u \geq 0.$$

**7. 非负二次函数与平方分解。** 一个关于  $u$  的二次函数若对所有  $u$  都非负，那么它可以写成某种平方和。最简单的一维例子是：

$$au^2 + 2bu + c.$$

如果  $a > 0$ ，则配方：

$$au^2 + 2bu + c = a \left( u + \frac{b}{a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{a}.$$

若该表达式对所有  $u$  非负，则必须有：

$$a \geq 0, \quad c - \frac{b^2}{a} \geq 0$$

在高维向量情形中，对应的是矩阵半正定和平方分解。原文选择把这个非负二次函数写成：

$$(\ell(x) + W(x)u)^T (\ell(x) + W(x)u).$$

这里：

- $\ell(x) \in \mathbb{R}^r$ ,  $r$  可以根据需要选择。
- $W(x) \in \mathbb{R}^{r \times m}$ 。
- $W(x)u \in \mathbb{R}^r$ , 能与  $\ell(x)$  相加。
- 平方项  $(\ell + Wu)^T(\ell + Wu)$  是一个标量, 并且总是非负。  
为什么总是非负? 令:

$$z = \ell + Wu.$$

则:

$$z^T z = \sum_{i=1}^r z_i^2 \geq 0.$$

这就是“耗散项”的代数表达。

8. 展开平方项并比较系数。现在令:

$$h^T Qh + 2h^T QJu + u^T J^T QJu + 2h^T Su + 2u^T J^T Su + u^T Ru - \nabla \phi^T f - \nabla \phi^T Gu = (\ell + Wu)^T(\ell + Wu)$$

右侧展开:

$$(\ell + Wu)^T(\ell + Wu) = (\ell^T + u^T W^T)(\ell + Wu).$$

按分配律:

$$= \ell^T \ell + \ell^T Wu + u^T W^T \ell + u^T W^T Wu.$$

由于  $\ell^T Wu$  是标量,

$$u^T W^T \ell = (\ell^T Wu)^T = \ell^T Wu.$$

因此:

$$(\ell + Wu)^T(\ell + Wu) = \ell^T \ell + 2\ell^T Wu + u^T W^T Wu.$$

左侧按  $u$  分组后为:

$$(h^T Qh - \nabla \phi^T f) + 2 \left( h^T QJ + h^T S - \frac{1}{2} \nabla \phi^T G \right) u + u^T (J^T QJ + J^T S + S^T J + R) u.$$

比较常数项:

$$h^T Qh - \nabla \phi^T f = \ell^T \ell.$$

比较一次项:

$$h^T QJ + h^T S - \frac{1}{2} \nabla \phi^T G = \ell^T W.$$

比较二次项：

$$J^T QJ + J^T S + S^T J + R = W^T W.$$

这三条就是后面定理的核心。本节做了三个动作：

1. 把积分耗散不等式转为瞬时微分不等式。
2. 把系统输出  $y = h + Ju$  代入供给率并展开成关于  $u$  的二次函数。
3. 用平方项  $(\ell + Wu)^T(\ell + Wu)$  表示非负余量，并通过比较系数得到三条方程。

因此，判断耗散性的问题开始变成“能否找到  $\phi, \ell, W$  满足这些方程”。

### 4.2.3 连续时间系统的主定理

本节把上一节的推导正式写成两个定理：

1. 对 cyclo-dissipativeness,  $\phi$  是 virtual storage function 的充要条件。
2. 对 dissipativeness,  $\phi$  是 storage function 的充要条件。

两者的代数方程相同，差别在于 dissipativeness 要求 storage function 非负，并通常规范化为  $\phi(0) = 0$ 。

**定理 9: cyclo-dissipativeness 的条件。** 对于系统：

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad y = h(x) + J(x)u,$$

一个可微函数  $\phi(x)$  是  $(Q, S, R)$ -cyclo-dissipative 的 virtual storage function, 当且仅当存在函数  $\ell(x)$  和  $W(x)$ , 使得：

$$\nabla \phi^T f = h^T Qh - \ell^T \ell,$$

$$\frac{1}{2} \nabla \phi^T G = h^T (QJ + S) - \ell^T W,$$

$$R + J^T S + S^T J + J^T QJ = W^T W.$$

这里“当且仅当”包含两个方向：

- 必要性：如果  $\phi$  已经是 virtual storage function, 那么它必须满足这些方程。
- 充分性：如果这些方程成立, 那么  $\phi$  确实满足 virtual storage inequality。

**必要性为什么成立。** 必要性实际上已经在 5.2 推过。从 virtual storage inequality 的微分形式开始：

$$y^T Qy + 2y^T Su + u^T Ru \geq \nabla\phi^T f + \nabla\phi^T Gu.$$

移项：

$$y^T Qy + 2y^T Su + u^T Ru - \nabla\phi^T f - \nabla\phi^T Gu \geq 0.$$

代入：

$$y = h + Ju.$$

得到一个关于  $u$  的非负二次函数。由于该二次函数对所有输入  $u$  都非负，所以可以写成平方项：

$$y^T Qy + 2y^T Su + u^T Ru - \nabla\phi^T f - \nabla\phi^T Gu = (\ell + Wu)^T (\ell + Wu).$$

比较常数项、一次项、二次项，得到三条方程。因此，若  $\phi$  是 virtual storage function，这些方程是逃不掉的。

**充分性：从三条方程推回耗散不等式。** 现在反过来，假设存在  $\ell, W$ ，使三条方程成立。我们要证明：

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} w(y, u) dt \geq \phi(x(t_1)).$$

从链式法则开始：

$$\phi(x(t_1)) - \phi(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \phi(x(t)) dt.$$

因为：

$$\frac{d}{dt} \phi(x(t)) = \nabla\phi^T (f + Gu),$$

所以：

$$\phi(x(t_1)) = \phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \nabla\phi^T (f + Gu) dt.$$

展开 integrand：

$$\nabla\phi^T (f + Gu) = \nabla\phi^T f + \nabla\phi^T Gu.$$

现在用三条方程替换。第一条：

$$\nabla\phi^T f = h^T Qh - \ell^T \ell.$$

第二条:

$$\frac{1}{2}\nabla\phi^T G = h^T(QJ + S) - \ell^T W.$$

两边乘以 2:

$$\nabla\phi^T G = 2h^T(QJ + S) - 2\ell^T W.$$

再乘以  $u$ :

$$\nabla\phi^T Gu = 2h^T(QJ + S)u - 2\ell^T Wu.$$

因此:

$$\nabla\phi^T(f + Gu) = h^T Qh - \ell^T \ell + 2h^T(QJ + S)u - 2\ell^T Wu.$$

把  $2h^T(QJ + S)u$  展开:

$$2h^T(QJ + S)u = 2h^T QJu + 2h^T Su.$$

所以:

$$\nabla\phi^T(f + Gu) = h^T Qh + 2h^T QJu + 2h^T Su - \ell^T \ell - 2\ell^T Wu.$$

现在我们希望把它写成:

$$y^T Qy + 2y^T Su + u^T Ru - (\ell + Wu)^T(\ell + Wu).$$

检验这个等式。先展开右边的供给率:

$$y^T Qy + 2y^T Su + u^T Ru$$

代入  $y = h + Ju$ , 由 5.2 得:

$$= h^T Qh + 2h^T QJu + u^T J^T QJu + 2h^T Su + 2u^T J^T Su + u^T Ru.$$

再展开平方项:

$$(\ell + Wu)^T(\ell + Wu) = \ell^T \ell + 2\ell^T Wu + u^T W^T Wu.$$

所以:

$$y^T Qy + 2y^T Su + u^T Ru - (\ell + Wu)^T(\ell + Wu)$$

$$\begin{aligned}
&= h^T Q h + 2h^T Q J u + 2h^T S u - \ell^T \ell - 2\ell^T W u \\
&\quad + u^T (J^T Q J + J^T S + S^T J + R) u - u^T W^T W u.
\end{aligned}$$

第三条方程说:

$$J^T Q J + J^T S + S^T J + R = W^T W.$$

因此最后两项抵消:

$$u^T (J^T Q J + J^T S + S^T J + R) u - u^T W^T W u = 0.$$

于是:

$$y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u - (\ell + W u)^T (\ell + W u)$$

$$= h^T Q h + 2h^T Q J u + 2h^T S u - \ell^T \ell - 2\ell^T W u = \nabla \phi^T (f + G u).$$

因此:

$$\frac{d}{dt} \phi(x(t)) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u - (\ell + W u)^T (\ell + W u).$$

因为平方项非负:

$$(\ell + W u)^T (\ell + W u) \geq 0,$$

所以:

$$\frac{d}{dt} \phi(x(t)) \leq y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u.$$

两边从  $t_0$  积分到  $t_1$ :

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \phi(x(t)) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} [y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u] dt.$$

左边积分为:

$$\phi(x(t_1)) - \phi(x(t_0)).$$

于是:

$$\phi(x(t_1)) - \phi(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} [y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u] dt.$$

移项:

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} [y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u] dt \geq \phi(x(t_1)).$$

这正是 virtual storage inequality.

**定理 10: dissipativeness 的条件。** 定理 10 与定理 9 的方程完全相同, 但多了两个 storage function 条件:

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(x) \geq 0 \quad \text{for all } x.$$

所以  $\phi(x)$  是  $(Q, S, R)$ -dissipative 的 storage function, 当且仅当:

$$\phi(0) = 0,$$

$$\phi(x) \geq 0,$$

并且存在  $\ell, W$ , 满足:

$$\nabla \phi^T f = h^T Q h - \ell^T \ell,$$

$$\frac{1}{2} \nabla \phi^T G = h^T (QJ + S) - \ell^T W,$$

$$R + J^T S + S^T J + J^T Q J = W^T W.$$

为什么多出非负条件? cyclo-dissipativity 允许 virtual storage function 取负值。它关心的是沿闭合循环或轨迹的能量平衡。dissipativity 更强, 要求  $\phi$  真正像“储能”一样不能为负。物理储能如果是电容能量、电感能量、动能、势能, 通常应满足:

$$\phi(x) \geq 0.$$

而  $\phi(0) = 0$  是一个规范化条件: 把零状态的储能定为零。

**显式耗散项。** 原文特别指出: 通过这些方程, 我们不只是证明了不等式, 还显式识别了耗散项。由上面推导:

$$\frac{d}{dt} \phi(x(t)) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u - (\ell + W u)^T (\ell + W u).$$

移项:

$$y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u - \frac{d}{dt} \phi(x(t)) = (\ell + W u)^T (\ell + W u).$$

左边是“输入供给率减去储能增长率”。右边是平方项，因此非负。于是：

$$\text{供给的能量速率} = \text{储能增长速率} + \text{耗散速率}.$$

更明确地说：

$$w(y, u) = \dot{\phi}(x) + (\ell + Wu)^T(\ell + Wu).$$

对时间积分：

$$\int_{t_0}^{t_1} w(y, u) dt = \phi(x(t_1)) - \phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} (\ell + Wu)^T(\ell + Wu) dt.$$

重新排列：

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} w(y, u) dt - \phi(x(t_1)) = \int_{t_0}^{t_1} (\ell + Wu)^T(\ell + Wu) dt.$$

右边是非负积分，所以耗散不等式成立。这个等式比不等式更强：它告诉我们“不等式中剩下的余量到底在哪里”。第 5.3 节把 5.2 的推导升格为定理。核心要点是：

- 对 cyclo-dissipativity：允许  $\phi$  是 virtual storage，符号不必非负。
- 对 dissipativity：要求  $\phi \geq 0$ ，且  $\phi(0) = 0$ 。
- 三条代数/微分方程是共同核心。
- $(\ell + Wu)^T(\ell + Wu)$  是显式耗散率。

#### 4.2.4 存储函数的可微性问题

前面推导假设  $\phi(x)$  可微。可是 storage function 不一定天然可微。本节讨论这个技术问题：如果存在不可微的 storage function，我们还能不能使用前面结果？Moylan 的处理思路是：

1. 承认可能存在不可微的 storage function。
2. 给出一个局部可控性条件，保证 virtual storage function 至少连续。
3. 用上 Dini 导数或  $\limsup$  形式的导数替代普通导数，使前面的微分论证仍可继续。

**为什么可微性是问题。** 在 5.2 中，我们使用了链式法则：

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t)) = \nabla\phi^T \dot{x}(t).$$

这一步要求  $\phi$  对  $x$  可微。如果  $\phi$  有尖点，例如一维函数：

$$\phi(x) = |x|,$$

那么在  $x = 0$  处不可微。对这样的  $\phi$ ,  $\nabla\phi$  不存在, 前面的三条方程就不能直接写。控制理论中这种情况并不少见。Lyapunov 函数、value function、可达性函数、最优控制中的值函数, 都可能是连续但不可微的。

**局部可控性的定义。** 原文引入一个关于供给率  $w(x, u)$  的局部可控性定义。系统在状态  $x_0$  处 locally controllable, 意思是: 对  $x_0$  附近任意一个足够近的状态  $x_1$ , 都能选取某个输入  $u$  和某个终止时间  $t_1$ , 把系统从

$$x(t_0) = x_0$$

驱动到

$$x(t_1) = x_1.$$

但这里不只是能到达, 还要求这段运动的供给“代价”受到距离控制:

$$\int_{t_0}^{t_1} w(x(t), u(t)) dt \leq \rho(\|x_1 - x_0\|).$$

这里:

- $\|\cdot\|$  是状态空间中的范数。
- $\|x_1 - x_0\|$  表示两个状态之间的距离。
- $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  是连续函数。
- $\rho(0) = 0$ 。

这个条件的直观意思是: 如果目标状态  $x_1$  离  $x_0$  很近, 那么把系统从  $x_0$  移到  $x_1$  所需的供给代价也可以很小。这比“可达”更强, 因为它要求近距离移动的代价不会突然爆炸。

**定理 11: 局部可控性推出 virtual storage function 连续。** 定理内容: 如果系统 locally controllable, 那么任何在所有  $x \in X$  上存在的 virtual storage function  $\phi$  都是连续的。注意结论是“连续”, 不是“可微”。

**证明细节。** 取任意状态  $x_0$ 。设  $x_1$  在  $x_0$  的一个小邻域  $\Omega$  内。由局部可控性, 可以从  $x_0$  通过某个输入  $u$  到达  $x_1$ , 并且:

$$\int_{t_0}^{t_1} w(x(t), u(t)) dt \leq \rho(\|x_1 - x_0\|).$$

因为  $\phi$  是 virtual storage function, 所以沿这段轨迹有:

$$\phi(x_0) + \int_{t_0}^{t_1} w(x(t), u(t)) dt \geq \phi(x_1).$$

把  $\phi(x_0)$  移到右边:

$$\phi(x_1) - \phi(x_0) \leq \int_{t_0}^{t_1} w(x(t), u(t)) dt.$$

再用局部可控性给出的上界:

$$\phi(x_1) - \phi(x_0) \leq \rho(\|x_1 - x_0\|).$$

这给出一个方向的差值控制。现在反过来考虑从  $x_1$  到  $x_0$  的转移。局部可控性在每个状态附近成立, 因此也可得到:

$$\phi(x_0) - \phi(x_1) \leq \rho(\|x_0 - x_1\|).$$

由于范数对称:

$$\|x_0 - x_1\| = \|x_1 - x_0\|.$$

所以:

$$\phi(x_0) - \phi(x_1) \leq \rho(\|x_1 - x_0\|).$$

把两边合并:

$$|\phi(x_1) - \phi(x_0)| \leq \rho(\|x_1 - x_0\|).$$

因为  $\rho$  连续且  $\rho(0) = 0$ , 所以当:

$$x_1 \rightarrow x_0$$

时:

$$\|x_1 - x_0\| \rightarrow 0,$$

进而:

$$\rho(\|x_1 - x_0\|) \rightarrow \rho(0) = 0.$$

由夹逼:

$$|\phi(x_1) - \phi(x_0)| \rightarrow 0.$$

这正是  $\phi$  在  $x_0$  连续的定义。因为  $x_0$  任意, 所以  $\phi$  在整个状态空间连续。

用  $\limsup$  替代普通导数。定理只给出连续性，不给出可微性。那前面的  $\frac{d}{dt}\phi(x(t))$  怎么办？原文建议使用：

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t)) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [\phi(x(t+h)) - \phi(x(t))].$$

这里  $\limsup$  是 upper limit superior。它的作用是：即使普通极限不存在，也可以取所有趋近序列上极限值的上确界。为什么用  $h \rightarrow 0^+$ ？因为动力系统从当前时刻往未来演化，耗散不等式自然是前向时间条件。这个导数类似 Lyapunov 理论中的 upper Dini derivative。它足以表达：

储能的最大前向增长率  $\leq$  供给率。

因此，即使  $\phi$  不光滑，只要能控制这个上导数，耗散性论证仍然可以成立。本节提醒我们：第 5.2 和 5.3 的漂亮方程建立在可微性上。实际系统中，storage function 可能不可微。局部可控性可以保证 virtual storage function 至少连续，而用  $\limsup$  形式的前向导数可以在一定程度上替代普通导数。这说明本章的代数条件非常有用，但其光滑性假设不是完全无代价的。

#### 4.2.5 更一般的非线性系统

前面几节处理的是对输入  $u$  线性的非线性系统。本节说明：如果系统对  $u$  也非线性，那么前面的漂亮平方分解通常无法继续。

**更一般的系统形式。** 考虑：

$$\dot{x} = f(x, u),$$

$$y = h(x, u).$$

这里  $f$  和  $h$  都可以任意依赖  $x$  和  $u$ 。例如可能出现：

$$f(x, u) = x^2 + \sin u,$$

或：

$$h(x, u) = xu + u^3.$$

这种情况下，输出不再是：

$$y = h(x) + J(x)u$$

这种仿射形式。

**微分耗散不等式仍然成立。** 如果  $\phi$  可微，链式法则仍然给出：

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t)) = \nabla\phi^T f(x, u).$$

供给率为：

$$w(y, u) = y^T Qy + 2y^T Su + u^T Ru.$$

代入  $y = h(x, u)$ ，得到：

$$h(x, u)^T Qh(x, u) + 2h(x, u)^T Su + u^T Ru - \nabla\phi^T f(x, u) \geq 0.$$

原文简写为：

$$h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru - \nabla\phi^T f \geq 0.$$

这仍然是正确的耗散性条件。

**为什么不能继续化简。** 问题在于：这个表达式一般不再是关于  $u$  的二次函数。前面能比较系数，是因为：

$$y = h(x) + J(x)u$$

使得  $y^T Qy$  最多含  $u^2$ ，而：

$$\nabla\phi^T [f(x) + G(x)u]$$

最多含  $u$  的一次项。因此整个表达式关于  $u$  是二次的：

常数项 + 一次项 + 二次项。

但若：

$$y = h(x, u)$$

含  $u^3$ ，那么  $y^T Qy$  可能含  $u^6$ 。若  $f(x, u)$  含  $\sin u$ ，那么  $\nabla\phi^T f(x, u)$  会含三角函数。此时无法用简单的矩阵平方分解：

$$(\ell + Wu)^T (\ell + Wu)$$

来完全表达。所以一般非线性系统仍可写出耗散不等式，但没有像定理 9 和定理 10 那样整洁的代数判据。本节的作用是划清边界：

- 对输入仿射的非线性系统，可以得到显式方程条件。
- 对一般非线性输入系统，只能保留不等式形式。
- 第 5 章的代数化能力来自“关于  $u$  的二次结构”，不是来自所有非线性系统的一般性质。

### 4.2.6 线性连续时间系统

本节把前面的非线性输入仿射系统专门化到线性时不变系统，得到矩阵方程和矩阵不等式。这里开始出现 Riccati 方程的影子。

**线性连续时间系统。** 原文系统为：

$$\dot{x} = Fx + Gu,$$

$$y = H^T x + Ju.$$

这里：

- $x \in \mathbb{R}^n$ ：状态。
- $u \in \mathbb{R}^m$ ：输入。
- $y \in \mathbb{R}^p$ ：输出。
- $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ：状态矩阵。
- $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ：输入矩阵。
- $H^T \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ，所以  $H \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 。
- $J \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ：直接通道矩阵。

作者用  $H^T x$  而不是常见的  $Cx$ 。这只是记号选择。若采用现代状态空间常用记号，可以令：

$$C = H^T.$$

**为什么 storage function 取二次型。** 线性系统加二次供给率，会导向线性二次优化问题。在线性二次问题中，最优值函数通常是状态的二次函数。因此令：

$$\phi(x) = x^T P x.$$

这里：

- $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。
- 通常取  $P = P^T$ ，因为  $x^T P x$  只依赖  $P$  的对称部分。

为什么可以假设  $P$  对称？把  $P$  分成对称部分和反对称部分：

$$P = P_s + P_a,$$

其中：

$$P_s = \frac{1}{2}(P + P^T), \quad P_a = \frac{1}{2}(P - P^T).$$

反对称部分满足：

$$P_a^T = -P_a.$$

对任意  $x$ :

$$x^T P_a x$$

是标量, 因此等于自身转置:

$$x^T P_a x = (x^T P_a x)^T = x^T P_a^T x = -x^T P_a x.$$

于是:

$$x^T P_a x = 0.$$

所以:

$$x^T P x = x^T P_s x.$$

只需考虑对称  $P$ .

计算  $\nabla\phi$ 。若:

$$\phi(x) = x^T P x,$$

且  $P = P^T$ , 则:

$$\nabla\phi(x) = 2P x.$$

推导如下。写成分量:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i P_{ij} x_j.$$

对  $x_k$  求偏导:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n P_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n x_i P_{ik}.$$

第二项可写为:

$$\sum_{i=1}^n P_{ik} x_i.$$

若  $P = P^T$ , 则  $P_{ik} = P_{ki}$ 。所以:

$$\sum_{i=1}^n P_{ik} x_i = \sum_{i=1}^n P_{ki} x_i.$$

与第一项同型, 得到:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = 2 \sum_{j=1}^n P_{kj} x_j.$$

向量形式就是：

$$\nabla \phi = 2Px.$$

因此：

$$\nabla \phi^T = 2x^T P.$$

代入定理 9/10 的第一条方程。线性系统对应：

$$f(x) = Fx,$$

$$G(x) = G,$$

$$h(x) = H^T x,$$

$$J(x) = J.$$

第一条方程：

$$\nabla \phi^T f = h^T Qh - \ell^T \ell.$$

左边：

$$\nabla \phi^T f = (2x^T P)(Fx) = 2x^T PFx.$$

右边第一项：

$$h^T Qh = (H^T x)^T Q(H^T x).$$

因为：

$$(H^T x)^T = x^T H,$$

所以：

$$h^T Qh = x^T HQH^T x.$$

为了让右边整体是关于  $x$  的二次型， $\ell(x)$  必须是  $x$  的线性函数。令：

$$\ell(x) = L^T x$$

或等价地按原文排布写成某个矩阵  $L$  使:

$$\ell(x)^T \ell(x) = x^T L L^T x.$$

于是第一条方程变成:

$$2x^T P F x = x^T H Q H^T x - x^T L L^T x.$$

由于左侧二次型只由矩阵的对称部分决定:

$$2x^T P F x = x^T (P F + F^T P) x.$$

证明:

$$x^T F^T P x = (x^T P F x)^T = x^T P^T F x = x^T P F x,$$

其中用到了  $P = P^T$ 。因此:

$$x^T (P F + F^T P) x = 2x^T P F x.$$

所以对所有  $x$  成立要求:

$$P F + F^T P = H Q H^T - L L^T.$$

**第二条方程。** 定理 9/10 的第二条方程:

$$\frac{1}{2} \nabla \phi^T G = h^T (Q J + S) - \ell^T W.$$

左边:

$$\frac{1}{2} \nabla \phi^T G = \frac{1}{2} (2x^T P) G = x^T P G.$$

右边:

$$h^T (Q J + S) = (H^T x)^T (Q J + S) = x^T H (Q J + S).$$

若  $\ell(x)^T = x^T L$ , 则:

$$\ell^T W = x^T L W.$$

所以:

$$x^T P G = x^T H (Q J + S) - x^T L W.$$

因为对所有  $x$  成立:

$$P G = H (Q J + S) - L W.$$

**第三条方程。** 第三条方程不含  $x$ :

$$R + J^T S + S^T J + J^T Q J = W^T W.$$

由于左侧是常矩阵,  $W$  也可取常矩阵。

**线性连续时间系统的三条矩阵方程。** 综上, 线性系统满足  $(Q, S, R)$ -cyclo-dissipativity 或 dissipativity 的候选条件是存在矩阵  $P, L, W$ , 使:

$$PF + F^T P = HQH^T - LL^T,$$

$$PG = H(QJ + S) - LW,$$

$$R + J^T S + S^T J + J^T Q J = W^T W.$$

若讨论 dissipativity, 还要加:

$$P = P^T \geq 0.$$

若只讨论 cyclo-dissipativity, 则  $P$  的符号不必非负。

**消去  $L, W$ : 矩阵半正定不等式。** 三条方程也可以合成一个块矩阵半正定条件。定义块矩阵:

$$M = \begin{bmatrix} HQH^T - PF - F^T P & H(QJ + S) - PG \\ (QJ + S)^T H^T - G^T P & R + J^T S + S^T J + J^T Q J \end{bmatrix}.$$

如果三条方程成立, 则: 第一块:

$$HQH^T - PF - F^T P = LL^T.$$

第二块:

$$H(QJ + S) - PG = LW.$$

右下块:

$$R + J^T S + S^T J + J^T Q J = W^T W.$$

所以:

$$M = \begin{bmatrix} LL^T & LW \\ W^T L^T & W^T W \end{bmatrix}.$$

这个矩阵可以写成:

$$M = \begin{bmatrix} L \\ W^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & W \end{bmatrix}.$$

验证乘法:

$$\begin{bmatrix} L \\ W^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LL^T & LW \\ W^T L^T & W^T W \end{bmatrix}.$$

任何形如  $AA^T$  或  $BB^T B$  的平方因子矩阵都是半正定的。对任意向量  $z$ :

$$z^T M z = z^T \begin{bmatrix} L \\ W^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & W \end{bmatrix} z = \left\| \begin{bmatrix} L^T & W \end{bmatrix} z \right\|^2 \geq 0.$$

因此:

$$M \geq 0.$$

这就是线性连续时间的矩阵不等式形式。

**为什么  $P$  不唯一。** 原文指出  $P$  通常不唯一。原因包括:

1.  $L, W$  的维数不固定。
2. 平方分解本身不唯一。
3. 消去  $L$  后通常得到 Riccati 方程, 而 Riccati 方程一般有多个解。

例如若:

$$R + J^T S + S^T J + J^T Q J$$

非奇异且正定, 则可以取:

$$W = (R + J^T S + S^T J + J^T Q J)^{1/2}.$$

这里矩阵平方根  $A^{1/2}$  满足:

$$A^{1/2} A^{1/2} = A$$

或在对称情形下:

$$(A^{1/2})^T A^{1/2} = A.$$

然后由第二条方程:

$$LW = H(QJ + S) - PG.$$

若  $W$  可逆, 则:

$$L = [H(QJ + S) - PG]W^{-1}.$$

代入第一条：

$$PF + F^T P = HQH^T - LL^T.$$

就得到只关于  $P$  的矩阵方程。因为  $L$  中含  $P$ ， $LL^T$  中会出现  $P$  的二次项，所以这是 Riccati 型方程。Riccati 方程在控制理论中常有多解，其中满足稳定化条件或半正定条件的解才是工程上常用的那个。线性连续时间系统中，第 5.3 的函数方程变成矩阵方程：

$$PF + F^T P = HQH^T - LL^T,$$

$$PG = H(QJ + S) - LW,$$

$$R + J^T S + S^T J + J^T QJ = W^T W.$$

也可以写成一个块矩阵半正定条件。对 dissipativity，进一步要求  $P \geq 0$ 。这为后续频域判据、Riccati 判据和稳定性定理搭桥。

#### 4.2.7 线性离散时间系统

本节把连续时间结果改成离散时间版本。关键区别是：离散时间没有时间导数，储能变化由一步差分表示。

**离散时间线性系统。** 原文考虑：

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

这里：

- $t$  是整数时刻。
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 。
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 。
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ 。
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 。
- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 。
- $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ 。

作者用  $(A, B, C, D)$  而不是连续时间的  $(F, G, H, J)$ ，因为这是离散时间线性系统的传统记号。

**离散时间内积。** 连续时间中截断内积是积分：

$$\langle f, g \rangle_T = \int_{t_0}^T f(t)^T g(t) dt.$$

离散时间中对应的是求和：

$$\langle f, g \rangle_T = \sum_{t=t_0}^{T-1} f(t)^T g(t).$$

为什么上限是  $T-1$ ? 因为从  $t_0$  到  $T$  的状态变化由步  $t_0, t_0+1, \dots, T-1$  决定。每一步从  $t$  推到  $t+1$ 。

**离散时间耗散不等式。** 积分形式变为求和形式：

$$\phi(x(t_0)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [y(t)^T Qy(t) + 2y(t)^T Su(t) + u(t)^T Ru(t)] \geq \phi(x(t_1)).$$

若只看一个时间步，从  $t$  到  $t+1$ ，则：

$$\phi(x(t)) + y(t)^T Qy(t) + 2y(t)^T Su(t) + u(t)^T Ru(t) \geq \phi(x(t+1)).$$

这就是离散时间版的“瞬时”耗散条件。连续时间中是：

$$\dot{\phi} \leq w.$$

离散时间中是：

$$\phi(x(t+1)) - \phi(x(t)) \leq w(t).$$

也就是储能的一步增量不能超过该步供给。

**令 storage function 为二次型。** 同线性连续时间一样，取：

$$\phi(x) = x^T P x.$$

对 dissipativity，要求：

$$P = P^T \geq 0.$$

对 cyclo-dissipativity， $P$  可不要求半正定。一步耗散不等式变成：

$$x^T P x + y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u \geq (Ax + Bu)^T P (Ax + Bu).$$

这里为了简洁写  $x = x(t)$ ， $u = u(t)$ ， $y = y(t)$ 。

展开左侧供给项。输出：

$$y = Cx + Du.$$

第一项：

$$y^T Qy = (Cx + Du)^T Q(Cx + Du).$$

展开转置：

$$(Cx + Du)^T = x^T C^T + u^T D^T.$$

所以：

$$y^T Qy = (x^T C^T + u^T D^T)Q(Cx + Du).$$

先乘右侧：

$$Q(Cx + Du) = QCx + QDu.$$

再分配：

$$y^T Qy = x^T C^T QCx + x^T C^T QDu + u^T D^T QCx + u^T D^T QDu.$$

若  $Q = Q^T$ ，则：

$$u^T D^T QCx = (x^T C^T QDu)^T = x^T C^T QDu.$$

所以：

$$y^T Qy = x^T C^T QCx + 2x^T C^T QDu + u^T D^T QDu.$$

第二项：

$$2y^T Su = 2(Cx + Du)^T Su.$$

展开：

$$2(x^T C^T + u^T D^T)Su = 2x^T C^T Su + 2u^T D^T Su.$$

第三项  $u^T Ru$  保持。储能初值项是：

$$x^T Px.$$

展开右侧下一步储能。

$$x(t+1) = Ax + Bu.$$

因此：

$$\phi(x(t+1)) = (Ax + Bu)^T P(Ax + Bu).$$

展开：

$$(Ax + Bu)^T = x^T A^T + u^T B^T.$$

所以：

$$(Ax + Bu)^T P(Ax + Bu) = (x^T A^T + u^T B^T)P(Ax + Bu).$$

先乘右侧：

$$P(Ax + Bu) = PAx + PBu.$$

再展开四项：

$$x^T A^T PAx + x^T A^T PBu + u^T B^T PAx + u^T B^T PBu.$$

因为  $P = P^T$ ，交叉项互为转置：

$$u^T B^T PAx = (x^T A^T PBu)^T = x^T A^T PBu.$$

所以：

$$(Ax + Bu)^T P(Ax + Bu) = x^T A^T PAx + 2x^T A^T PBu + u^T B^T PBu.$$

把所有项移到左侧并分组。一步耗散不等式：

$$x^T Px + y^T Qy + 2y^T Su + u^T Ru - (Ax + Bu)^T P(Ax + Bu) \geq 0.$$

把  $x^2$  项收集：来自  $x^T Px$ ：

$$x^T Px.$$

来自  $y^T Qy$ ：

$$x^T C^T Q C x.$$

来自减去下一步储能：

$$-x^T A^T P A x.$$

所以  $x^2$  项为:

$$x^T (P + C^T Q C - A^T P A) x.$$

把  $x, u$  交叉项收集: 来自  $y^T Q y$ :

$$2x^T C^T Q D u.$$

来自  $2y^T S u$ :

$$2x^T C^T S u.$$

来自减去下一步储能:

$$-2x^T A^T P B u.$$

所以交叉项为:

$$2x^T (C^T Q D + C^T S - A^T P B) u.$$

把  $u^2$  项收集: 来自  $y^T Q y$ :

$$u^T D^T Q D u.$$

来自  $2y^T S u$ :

$$2u^T D^T S u.$$

来自  $u^T R u$ :

$$u^T R u.$$

来自减去下一步储能:

$$-u^T B^T P B u.$$

同样对称化:

$$2u^T D^T S u = u^T (D^T S + S^T D) u.$$

因此  $u^2$  项为:

$$u^T (R + D^T S + S^T D + D^T Q D - B^T P B) u.$$

总不等式:

$$x^T(P + C^TQC - A^TPA)x + 2x^T(C^TQD + C^TS - A^TPB)u \\ + u^T(R + D^TS + S^TD + D^TQD - B^TPB)u \geq 0.$$

写成块矩阵。令：

$$M = \begin{bmatrix} P + C^TQC - A^TPA & C^TQD + C^TS - A^TPB \\ D^TQC + S^TC - B^TPA & R + D^TS + S^TD + D^TQD - B^TPB \end{bmatrix}.$$

则：

$$\begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \geq 0.$$

这必须对所有  $x$  和  $u$  成立，所以：

$$M \geq 0.$$

因子分解得到三条矩阵方程。如果  $M \geq 0$ ，可以分解为：

$$M = \begin{bmatrix} L \\ W^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & W \end{bmatrix}.$$

展开右侧：

$$M = \begin{bmatrix} LL^T & LW \\ W^TL^T & W^TW \end{bmatrix}.$$

比较块矩阵得到：

$$P + C^TQC - A^TPA = LL^T,$$

$$C^TQD + C^TS - A^TPB = LW,$$

$$R + D^TS + S^TD + D^TQD - B^TPB = W^TW.$$

这就是离散时间线性系统的代数条件。

**dissipativity 与 cyclodissipativity 的差别。** 如果这些方程有解  $P, L, W$ , 则系统具有相应的  $(Q, S, R)$  cyclodissipativity 或 dissipativity。区别仍然在  $P$ :

- dissipativity: 要求  $P \geq 0$ , 因为  $\phi(x) = x^T P x$  必须非负。
- cyclodissipativity: 不要求  $P \geq 0$ , 因为 virtual storage function 可以有负值。

**为什么非线性离散时间没有简单对应结果。** 原文最后指出: 类似方法不能直接推广到“显然的”非线性离散时间系统。原因是离散时间要处理:

$$\phi(x(t+1)) = \phi(Ax + Bu).$$

在线性系统且  $\phi = x^T P x$  时, 这个表达式可以完整展开成关于  $x, u$  的二次型。但若系统非线性:

$$x(t+1) = F(x(t), u(t)),$$

则:

$$\phi(x(t+1)) = \phi(F(x, u)).$$

如果  $\phi$  不是二次函数, 或者  $F$  不是仿射函数, 展开后一般不是简单的二次型。于是无法通过块矩阵半正定条件来表达。这就是连续时间与离散时间之间的一个重要差别: 连续时间可以用导数局部化, 而离散时间的一步变化包含完整的非线性复合  $\phi(F(x, u))$ 。

线性离散时间系统的耗散性可通过块矩阵  $M \geq 0$  判断, 或等价地通过三条矩阵因子方程判断。它是连续时间线性矩阵判据的离散对应物, 但对一般非线性离散系统并没有同样简单的公式。

## 第五章 稳定性：单环反馈、大规模互联与小增益

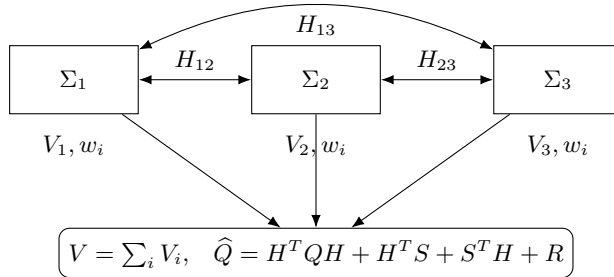


图 5.1 大规模互联系统：每个子系统给出局部耗散证书，互联矩阵负责合账。

耗散理论的价值不在于给单个系统贴标签，而在于把局部能量证书组合成整体稳定性结论。本章从  $Q < 0$  导出的有限增益稳定开始，逐步进入互联系统、无源互联、小增益定理和锥形子系统。

**定理 5.1 (合账原则)** . 若每个子系统都有自己的耗散不等式，把互联方程代入并求和后，整体系统的稳定性可由一个聚合二次型的负定性判定。其本质是：局部储能函数相加成为整体 Lyapunov 函数，互联矩阵只改变端口供给项。

### 5.1 稳定性：从单个系统到互联系统

#### 5.1.1 本章概览

第 6 章开始证明全书最核心的一类结论：耗散性怎样推出稳定性。这一章的基本主线是：

1. 如果一个系统对某个  $(Q, S, R)$  是 dissipative，且  $Q < 0$ ，那么可以推出 finite-gain stability。
2. 如果系统还有合适的状态空间实现和可检测性条件，则可以推出状态渐近稳定。
3. 对复杂系统，单个系统的稳定判据往往不够实用；更重要的是把复杂系统拆成互联系统，然后由各子系统的 dissipativity 组合出整体稳定条件。

为什么  $Q < 0$  这么关键。供给率为：

$$w(y, u) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u.$$

如果  $Q < 0$ ，那么  $y^T Q y$  对输出  $y$  是负定项。也就是说，输出能量越大，这一项越负。耗散不等式大致给出：

$$\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq 0.$$

当  $Q < 0$  时，第一项会惩罚输出能量。为了不让总和变成负数，输出  $y$  的大小必须被输入  $u$  控制住。这就是 finite-gain stability 的来源。如果  $Q \geq 0$ ，输出项不再惩罚输出大小，因此单凭这个不等式通常不能推出稳定性。但  $Q \geq 0$  的子系统仍可能是有用的，因为它可以与别的子系统互联后，在整体层面形成负定的输出项。

**本章为什么转向互联系统。** 作者指出一个微妙问题：对单个简单系统，先找  $(Q, S, R)$  cyclo-dissipativity，再加条件证明 dissipativity，有时会把稳定性当作前提再证明稳定性，形成循环。工程上真正需要强工具的地方，是复杂系统。复杂系统通常可以拆成若干子系统：

$$G_1, G_2, \dots, G_N.$$

每个子系统可能只满足某种较弱的 dissipativity，但它们通过互联矩阵组合后，整体的  $\bar{Q}$  可能变成负定，于是整体稳定。这就是第 6 章的大方向：不是只问“一个系统稳定吗”，而是问“若每个子系统满足某种供给率约束，怎样判断互联整体稳定”。

### 5.1.2 基本稳定性结果

本节给出两个基本稳定性定理：

1. 定理 12:  $(Q, S, R)$ -dissipativity 加  $Q < 0$  推出 finite-gain input-output stability。
2. 定理 14: 如果还有 ZSD 状态空间实现，则推出状态渐近稳定。

中间还给出 weak dissipativity 对应的 weak finite-gain stability。

**定理 12:**  $Q < 0$  耗散推出有限增益稳定。定理说：若系统  $G$  对某个  $Q < 0$  是  $(Q, S, R)$ -dissipative，则  $G$  是 finite-gain stable。输入输出记号为：

$$y = Gu.$$

由 dissipativity，得到对所有截断时间  $T$ ：

$$\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq 0.$$

这里：

- $\langle f, g \rangle_T$  是截断内积。
- $Q$  自伴且负定。
- $R$  自伴。
- $S$  是输入输出交叉项算子或矩阵。

目标是证明存在常数  $\gamma$ ，使：

$$\|y\|_T \leq \gamma \|u\|_T$$

或在弱形式中加常数项。这里定理 12 是普通 finite-gain，所以没有常数偏置项。

**第一步：把  $Q < 0$  写成平方形式。** 因为  $Q < 0$ ，所以  $-Q > 0$ 。于是可以因子分解：

$$Q = -M^*M,$$

其中：

- $M$  是可逆算子或矩阵。
- $M^*$  是  $M$  的伴随；在实矩阵中就是  $M^T$ 。
- $M^*M$  是正定的。

定义：

$$K = (M^*)^{-1}S.$$

于是：

$$M^*K = M^*(M^*)^{-1}S = S.$$

这个定义的目的，是让交叉项  $\langle y, Su \rangle_T$  出现在平方展开中。

**第二步：展开  $\|My - Ku\|_T^2$ 。** 考虑：

$$\|My - Ku\|_T^2 = \langle My - Ku, My - Ku \rangle_T.$$

按内积分配律展开：

$$\langle My - Ku, My - Ku \rangle_T$$

$$= \langle My, My \rangle_T - \langle My, Ku \rangle_T - \langle Ku, My \rangle_T + \langle Ku, Ku \rangle_T.$$

第一项：

$$\langle My, My \rangle_T = \langle y, M^*My \rangle_T.$$

因为：

$$Q = -M^*M,$$

所以：

$$M^*M = -Q.$$

因此：

$$\langle My, My \rangle_T = -\langle y, Qy \rangle_T.$$

第二项：

$$\langle My, Ku \rangle_T = \langle y, M^*Ku \rangle_T.$$

由于  $M^*K = S$ ，得到：

$$\langle My, Ku \rangle_T = \langle y, Su \rangle_T.$$

第三项在实内积下与第二项相同：

$$\langle Ku, My \rangle_T = \langle y, Su \rangle_T.$$

更严格地说，它是相应标量的转置/伴随，最终与交叉项合并为  $2\langle y, Su \rangle_T$ 。第四项：

$$\langle Ku, Ku \rangle_T = \langle u, K^*Ku \rangle_T.$$

现在计算  $K^*K$ 。由：

$$K = (M^*)^{-1}S,$$

得：

$$K^* = S^*M^{-1}.$$

所以：

$$K^*K = S^*M^{-1}(M^*)^{-1}S.$$

而：

$$Q^{-1} = (-M^*M)^{-1} = -M^{-1}(M^*)^{-1}.$$

因此：

$$M^{-1}(M^*)^{-1} = -Q^{-1}.$$

代入：

$$K^*K = -S^*Q^{-1}S.$$

在实矩阵记号中  $S^* = S^T$ ，所以：

$$\langle Ku, Ku \rangle_T = -\langle u, S^T Q^{-1} S u \rangle_T.$$

把四项合并：

$$\|My - Ku\|_T^2 = -\langle y, Qy \rangle_T - 2\langle y, Su \rangle_T - \langle u, S^T Q^{-1} S u \rangle_T.$$

**第三步：用耗散不等式给出上界。** 把上式加减  $\langle u, Ru \rangle_T$ ：

$$\begin{aligned} \|My - Ku\|_T^2 &= -[\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T] \\ &\quad + \langle u, (R - S^T Q^{-1} S)u \rangle_T. \end{aligned}$$

由 dissipativity：

$$\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq 0.$$

所以负号后的括号满足：

$$-[\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T] \leq 0.$$

因此：

$$\|My - Ku\|_T^2 \leq \langle u, (R - S^T Q^{-1} S)u \rangle_T.$$

选择  $\alpha > 0$ ，使：

$$R - S^T Q^{-1} S \leq \alpha^2 I.$$

这样的  $\alpha$  总能选到，只要左边是有界自伴矩阵或算子；取足够大的  $\alpha$  即可。于是：

$$\langle u, (R - S^T Q^{-1} S)u \rangle_T \leq \alpha^2 \langle u, u \rangle_T = \alpha^2 \|u\|_T^2.$$

因此：

$$\|My - Ku\|_T^2 \leq \alpha^2 \|u\|_T^2.$$

两边开平方：

$$\|My - Ku\|_T \leq \alpha \|u\|_T.$$

**第四步：从  $My - Ku$  控制  $y$ 。** 由三角不等式：

$$\|My\|_T = \|(My - Ku) + Ku\|_T \leq \|My - Ku\|_T + \|Ku\|_T.$$

前一项有界：

$$\|My - Ku\|_T \leq \alpha \|u\|_T.$$

后一项：

$$\|Ku\|_T \leq \|K\| \|u\|_T.$$

所以：

$$\|My\|_T \leq (\alpha + \|K\|) \|u\|_T.$$

因为  $M$  可逆：

$$y = M^{-1}My.$$

于是：

$$\|y\|_T \leq \|M^{-1}\| \|My\|_T.$$

代入：

$$\|y\|_T \leq \|M^{-1}\| (\alpha + \|K\|) \|u\|_T.$$

令：

$$\gamma = \|M^{-1}\| (\alpha + \|K\|),$$

就得到：

$$\|y\|_T \leq \gamma \|u\|_T.$$

这就是 finite-gain stability。

**关于  $R - S^T Q^{-1} S$  的意义。** 证明中出现了矩阵：

$$R - S^T Q^{-1} S.$$

它类似 Schur complement。它决定了供给率对输入部分的剩余正性。如果：

$$R - S^T Q^{-1} S < 0,$$

那么供给率在某些输入方向上会过于负。原文指出，在这种情况下实际上不可能存在  $(Q, S, R)$ -dissipative 系统。这说明不是所有形式上写得出来的  $(Q, S, R)$  三元组都有实际意义。

**定理 13: weak dissipativity 推出 weak finite-gain stability.** weak  $(Q, S, R)$ -dissipativity 的定义是存在常数  $\beta$ , 使:

$$\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T + \beta \geq 0.$$

等价于:

$$\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq -\beta.$$

按定理 12 的同样推导, 会得到:

$$\|My - Ku\|_T^2 \leq \alpha^2 \|u\|_T^2 + \beta.$$

这不再给出纯粹线性增益界:

$$\|y\|_T \leq \gamma \|u\|_T.$$

而给出带偏置的界:

$$\|y\|_T \leq \gamma \|u\|_T + c,$$

或平方形式:

$$\|y\|_T^2 \leq a \|u\|_T^2 + b.$$

这就是 weak finite-gain stability。

**ZSD: zero-state detectable.** 为了从输入输出稳定转向状态稳定, 需要一个可检测性假设。定义 16: 系统  $G$  是 zero-state detectable, 简称 ZSD, 如果存在:

- 一个时间长度  $T > 0$ 。
- 一个连续严格单调函数  $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 。
- $\alpha(0) = 0$ , 且  $\alpha(\sigma) > 0$  对所有  $\sigma > 0$  成立。

使得在零输入:

$$u(t) = 0, \quad t \geq t_0$$

并且任意初始状态:

$$x(t_0) = x_0$$

下, 输出满足:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)^T y(t) dt \geq \alpha(|x_0|).$$

这里  $|x_0|$  是状态空间中的度量或范数。直观解释: 如果初始状态  $x_0$  不为零, 那么在未来长度为  $T$  的时间窗口里, 输出不能完全看不见它。状态越大, 输出能

量至少要有某个正下界。这正是“没有隐藏状态”的要求。对线性系统，它等价于 observability。

**定理 14：耗散加 ZSD 推出渐近稳定。** 定理说：如果输入输出映射  $G$  有一个 ZSD 状态空间实现，并且  $G$  对某个  $Q < 0$  是  $(Q, S, R)$ -dissipative，那么状态空间模型渐近稳定。

**证明思路一：储能单调下降。** 耗散不等式：

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} [y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u] dt \geq \phi(x(t_1)).$$

令零输入：

$$u(t) = 0.$$

则交叉项和输入项消失：

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} y^T Q y dt \geq \phi(x(t_1)).$$

因为  $Q < 0$ ，所以：

$$y^T Q y \leq 0.$$

因此：

$$\int_{t_0}^{t_1} y^T Q y dt \leq 0.$$

耗散不等式给出：

$$\phi(x(t_1)) \leq \phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} y^T Q y dt \leq \phi(x(t_0)).$$

所以  $\phi(x(t))$  沿零输入轨迹单调不减。又因为 storage function 非负：

$$\phi(x) \geq 0,$$

单调不减且有下界的函数必然收敛到某个极限：

$$\phi(x(t)) \rightarrow \phi_f \geq 0.$$

如果在极限集合里输出仍然非零，那么由于  $Q < 0$ ，会有：

$$\int y^T Q y dt < 0,$$

从而  $\phi$  还会继续下降，矛盾。因此极限集合中必须有：

$$y(t) = 0.$$

ZSD 再告诉我们：若零输入下输出持续看不见，只能说明状态趋向零。所以：

$$x(t) \rightarrow 0.$$

这就是渐近稳定。

**证明思路二：直接使用 ZSD 下界。** 为了避免“极限集合”语言，原文给出更直接的证明。因为  $Q < 0$ ，存在  $\mu > 0$ ，使：

$$y^T Q y \leq -\mu y^T y.$$

这里  $\mu$  可以取为  $-Q$  的最小特征值。原文用“ $Q$  的最大也就是最不负的特征值”来描述同一件事；为了避免符号混乱，这里记正数  $\mu > 0$ 。在零输入下，从  $t$  到  $t + T$  的耗散不等式给出：

$$\phi(x(t)) + \int_t^{t+T} y^T Q y d\tau \geq \phi(x(t+T)).$$

移项：

$$\phi(x(t)) - \phi(x(t+T)) \geq - \int_t^{t+T} y^T Q y d\tau.$$

由  $y^T Q y \leq -\mu y^T y$ ，得到：

$$-y^T Q y \geq \mu y^T y.$$

所以：

$$\phi(x(t)) - \phi(x(t+T)) \geq \mu \int_t^{t+T} y^T y d\tau.$$

由 ZSD：

$$\int_t^{t+T} y^T y d\tau \geq \alpha(|x(t)|).$$

因此：

$$\phi(x(t)) - \phi(x(t+T)) \geq \mu\alpha(|x(t)|).$$

也就是：

$$\mu\alpha(|x(t)|) \leq \phi(x(t)) - \phi(x(t+T)).$$

因为  $\phi(x(t))$  单调下降并收敛，故对任意  $\epsilon > 0$ ，当  $t$  足够大时：

$$\phi(x(t)) - \phi(x(t+T)) < \epsilon.$$

于是：

$$\mu\alpha(|x(t)|) < \epsilon.$$

因为  $\mu > 0$ ，得到：

$$\alpha(|x(t)|) < \frac{\epsilon}{\mu}.$$

令  $\epsilon \rightarrow 0$ ，有：

$$\alpha(|x(t)|) \rightarrow 0.$$

由于  $\alpha$  严格单调且  $\alpha(\sigma) > 0$  对  $\sigma > 0$ ，只能推出：

$$|x(t)| \rightarrow 0.$$

所以状态渐近稳定。本节建立了第 6 章后续所有稳定结论的基础：

- $Q < 0$  给出输出能量惩罚。
- dissipativity 因而推出 finite-gain stability。
- 加 ZSD 后，输出趋零能推出状态趋零。
- storage function 在证明中扮演 Lyapunov-like function，但不要求事先证明它可微。

### 5.1.3 互联系统

本节研究由  $N$  个子系统线性互联形成的复杂系统。核心目标是：如果每个子系统都有自己的  $(Q_i, S_i, R_i)$ -dissipativity，怎样推出整体系统的  $(\bar{Q}, \bar{S}, \bar{R})$ -dissipativity，并进一步得到稳定性。

**子系统与整体输入输出。** 设第  $i$  个子系统满足：

$$\langle y_i, Q_i y_i \rangle_T + 2\langle y_i, S_i u_i \rangle_T + \langle u_i, R_i u_i \rangle_T \geq 0.$$

把所有子系统输入堆叠为一个大向量：

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix},$$

输出也堆叠为：

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}.$$

定义块对角矩阵：

$$Q = \text{blockdiag}(Q_1, \dots, Q_N),$$

$$S = \text{blockdiag}(S_1, \dots, S_N),$$

$$R = \text{blockdiag}(R_1, \dots, R_N).$$

那么把所有子系统不等式相加，得到：

$$\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq 0.$$

**互联方程。** 系统互联由：

$$u = u_e - Hy$$

给出。这里：

- $u_e$  是外部输入向量。
- $H$  是互联矩阵。
- $-Hy$  表示由其他子系统输出反馈到当前子系统输入的内部连接。

为什么使用  $u = u_e - Hy$  而不是更一般的  $u = Ju_e - Hy$ ？作者解释说，稳定性分析应把每个可能进入内部输入端口的噪声都作为外部输入考虑。即使某些端口没有“人为施加”的输入，也可能有扰动。若这些扰动能激发不稳定模式，那么忽略它们会误判稳定性。

**代入互联方程。** 从整体耗散不等式开始：

$$\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq 0.$$

代入：

$$u = u_e - Hy.$$

第一项不变：

$$\langle y, Qy \rangle_T.$$

第二项：

$$2\langle y, S(u_e - Hy) \rangle_T = 2\langle y, Su_e \rangle_T - 2\langle y, SHy \rangle_T.$$

第三项：

$$\langle u_e - Hy, R(u_e - Hy) \rangle_T.$$

展开：

$$= \langle u_e, Ru_e \rangle_T - \langle u_e, RHy \rangle_T - \langle Hy, Ru_e \rangle_T + \langle Hy, RHy \rangle_T.$$

由于  $R$  自伴，两个交叉项合并为：

$$-2\langle Hy, Ru_e \rangle_T.$$

而：

$$\langle Hy, Ru_e \rangle_T = \langle y, H^T Ru_e \rangle_T.$$

所以外部输入交叉项为：

$$2\langle y, Su_e \rangle_T - 2\langle y, H^T Ru_e \rangle_T = 2\langle y, (S - H^T R)u_e \rangle_T.$$

输出二次项来自三部分：

1. 原来的  $\langle y, Qy \rangle_T$ 。
2.  $-2\langle y, SHy \rangle_T$ 。
3.  $\langle Hy, RHy \rangle_T = \langle y, H^T RHy \rangle_T$ 。

把第二项对称化：

$$-2\langle y, SHy \rangle_T = -\langle y, SHy \rangle_T - \langle y, H^T S^T y \rangle_T.$$

因此新的输出矩阵为：

$$\bar{Q} = Q - SH - H^T S^T + H^T RH.$$

新的交叉矩阵为：

$$\bar{S} = S - H^T R.$$

新的输入矩阵为：

$$\bar{R} = R.$$

所以整体系统是：

$$(\bar{Q}, \bar{S}, \bar{R})\text{-dissipative.}$$

**定理 15：互联系统稳定条件。** 定理说：由

$$u = u_e - Hy$$

定义的互联系统，如果：

$$\bar{Q} = Q - SH - H^T S^T + H^T R H < 0,$$

则整体系统 finite-gain stable。如果此外每个子系统都有 ZSD 状态空间实现，那么把所有子系统状态拼接起来得到的整体状态空间模型渐近稳定。

**状态空间部分为什么成立。** 第  $i$  个子系统 ZSD 表示存在：

$$\int_{t_0}^{t_0+T_i} y_i(t)^T y_i(t) dt \geq \alpha_i(|x_i(t_0)|).$$

取：

$$T = \max_i T_i.$$

把所有子系统输出能量相加：

$$\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)^T y(t) dt = \sum_i \int_{t_0}^{t_0+T} y_i(t)^T y_i(t) dt.$$

每个输出至少能检测对应状态，所以：

$$\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)^T y(t) dt \geq \sum_i \alpha_i(|x_i(t_0)|).$$

右侧作为整体状态：

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

的检测函数。只要某个  $x_i \neq 0$ ，对应  $\alpha_i > 0$ ，所以总和为正。因此整体也满足 ZSD。

**整体 storage function。** 原文还指出，整体 storage function 可以由子系统 storage function 相加得到：

$$\phi(x) = \sum_i \phi_i(x_i).$$

证明思想很直接：每个子系统有：

$$\phi_i(x_i(t_0)) + \langle y_i, Q_i y_i \rangle_T + 2\langle y_i, S_i u_i \rangle_T + \langle u_i, R_i u_i \rangle_T \geq \phi_i(x_i(t_1)).$$

把所有  $i$  相加：

$$\sum_i \phi_i(x_i(t_0)) + \langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq \sum_i \phi_i(x_i(t_1)).$$

代入互联方程后，就得到整体耗散不等式。于是：

$$\phi(x) = \sum_i \phi_i(x_i)$$

是整体系统的一个 storage function。这也解释了为什么 storage function 像 Lyapunov 函数：它沿零外部输入轨迹单调不增。但作者强调，它不一定可微，所以严格说不一定是经典 Lyapunov 函数。互联系统的关键计算是：

$$\bar{Q} = Q - SH - H^T S^T + H^T RH,$$

$$\bar{S} = S - H^T R,$$

$$\bar{R} = R.$$

只要  $\bar{Q} < 0$ ，整体稳定。后续小节就是把这个条件应用到 passive、finite-gain、conic 等不同子系统类别。

### 5.1.4 中性互联

本节定义 neutral interconnection：互联后系统的 dissipativity 参数不变。它解释了为什么某些互联，特别是被动系统的负反馈互联，不会破坏 passivity。

**neutral interconnection 的定义。** 互联后参数为：

$$\bar{Q} = Q - SH - H^T S^T + H^T RH,$$

$$\bar{S} = S - H^T R,$$

$$\bar{R} = R.$$

如果：

$$(\bar{Q}, \bar{S}, \bar{R}) = (Q, S, R),$$

则称  $H$  描述一个 neutral interconnection。

**求条件。** 首先：

$$\bar{R} = R$$

自动成立。要求：

$$\bar{S} = S.$$

即：

$$S - H^T R = S.$$

两边减去  $S$ ：

$$-H^T R = 0.$$

所以：

$$H^T R = 0.$$

再要求：

$$\bar{Q} = Q.$$

即：

$$Q - SH - H^T S^T + H^T R H = Q.$$

两边减去  $Q$ ：

$$-SH - H^T S^T + H^T R H = 0.$$

由于已经有  $H^T R = 0$ ，所以：

$$H^T R H = 0.$$

于是剩下：

$$-SH - H^T S^T = 0.$$

等价于：

$$SH + H^T S^T = 0.$$

因此 neutral interconnection 的条件是：

$$H^T R = 0, \quad SH + H^T S^T = 0.$$

**平行互联。** 最简单情形是没有反馈：

$$H = 0.$$

这时：

$$H^T R = 0, \quad SH + H^T S^T = 0$$

都显然成立。因此平行互联是 neutral 的。

**被动系统的重要特例。** 对 passivity, 典型参数是：

$$(Q, S, R) = (0, I, 0)$$

或更一般：

$$(Q, I, 0).$$

此时：

$$R = 0, \quad S = I.$$

第一个条件：

$$H^T R = 0$$

自动成立。第二个条件：

$$SH + H^T S^T = 0$$

变成：

$$H + H^T = 0.$$

也就是说，互联矩阵必须是 skew-symmetric, 即反对称矩阵。这正是负反馈互联背后的代数结构。一个子系统输出进入另一个子系统时，如果功率在内部端口之间守恒且符号相反，那么互联本身不产生也不消耗能量，所以保持 passivity。

neutral interconnection 的意义是：互联只重新分配内部能量，不改变整体供给率类型。对  $S = I, R = 0$  的系统，条件  $H + H^T = 0$  是“内部功率交换守恒”的矩阵表达。

### 5.1.5 单环反馈系统

本节把 6.3 的一般互联系统公式应用到最简单也最重要的互联：两个子系统组成的单环反馈。它解释了 passivity、input strict passivity、output strict passivity、very strict passivity 之间怎样互相补偿。

**单环互联方程。** 两个子系统输入输出为：

$$u_1, u_2, \quad y_1, y_2.$$

外部输入为：

$$u_{e1}, u_{e2}.$$

互联方程：

$$u_1 = u_{e1} - y_2,$$

$$u_2 = u_{e2} + y_1.$$

写成向量：

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad u_e = \begin{bmatrix} u_{e1} \\ u_{e2} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

我们希望写成：

$$u = u_e - Hy.$$

需要：

$$Hy = \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{bmatrix}.$$

因此：

$$H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

可以检查：

$$Hy = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{bmatrix}.$$

所以：

$$u_e - Hy = \begin{bmatrix} u_{e1} \\ u_{e2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{e1} - y_2 \\ u_{e2} + y_1 \end{bmatrix}.$$

计算整体  $\bar{Q}$ 。设两个子系统的参数为：

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}.$$

整体输出矩阵：

$$\bar{Q} = Q - SH - H^T S^T + H^T R H.$$

先算  $SH$ ：

$$SH = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S_1 \\ -S_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

再算  $H^T$ 。因为：

$$H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

所以：

$$H^T = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

而：

$$S^T = \begin{bmatrix} S_1^T & 0 \\ 0 & S_2^T \end{bmatrix}.$$

于是：

$$H^T S^T = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1^T & 0 \\ 0 & S_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -S_2^T \\ S_1^T & 0 \end{bmatrix}.$$

所以：

$$\begin{aligned} -SH - H^T S^T &= - \begin{bmatrix} 0 & S_1 \\ -S_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -S_2^T \\ S_1^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & S_2^T - S_1 \\ S_2 - S_1^T & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

再算  $H^T R H$ 。先：

$$RH = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ -R_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

然后:

$$H^T R H = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ -R_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix}.$$

所以:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 + R_2 & S_2^T - S_1 \\ S_2 - S_1^T & Q_2 + R_1 \end{bmatrix}.$$

**严格被动性的互补。** 若两个子系统分别是:

$$(-\epsilon_{11}I, I, -\epsilon_{21}I)$$

和:

$$(-\epsilon_{12}I, I, -\epsilon_{22}I)$$

dissipative, 则:

$$Q_1 = -\epsilon_{11}I, \quad S_1 = I, \quad R_1 = -\epsilon_{21}I,$$

$$Q_2 = -\epsilon_{12}I, \quad S_2 = I, \quad R_2 = -\epsilon_{22}I.$$

代入:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} -(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})I & 0 \\ 0 & -(\epsilon_{12} + \epsilon_{21})I \end{bmatrix}.$$

因为:

$$S_2^T - S_1 = I - I = 0,$$

$$S_2 - S_1^T = I - I = 0.$$

若:

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} > 0, \quad \epsilon_{12} + \epsilon_{21} > 0,$$

则:

$$\bar{Q} < 0.$$

于是整体稳定。这说明:

- 两个系统都 ISP 可以稳定。

- 两个系统都 OSP 可以稳定。
- 一个 passive, 另一个 VSP 也可以稳定。
- 甚至某些  $\epsilon_{ij}$  为负也可以, 只要相应和为正。

这里的本质是：一个子系统在输出端缺少严格性, 可以由另一个子系统在输入端提供。

**有限增益子系统的小增益条件。** 若两个子系统都有有限增益：

$$\|y_i\| \leq k_i \|u_i\|,$$

则它们分别是：

$$(-I, 0, k_i^2 I)$$

dissipative。不加权时：

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} (-1 + k_2^2)I & 0 \\ 0 & (-1 + k_1^2)I \end{bmatrix}.$$

这只给出：

$$k_1 < 1, \quad k_2 < 1.$$

这很保守, 因为经典小增益条件是：

$$k_1 k_2 < 1.$$

如何得到经典条件？利用一个事实：如果系统是  $(Q, S, R)$ -dissipative, 则对任意  $\alpha > 0$ , 它也是：

$$(\alpha Q, \alpha S, \alpha R)$$

dissipative。因为整个不等式乘以正数不改变方向。给第二个子系统乘权重  $\alpha$ , 得到：

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} (-1 + \alpha k_2^2)I & 0 \\ 0 & (-\alpha + k_1^2)I \end{bmatrix}.$$

要求  $\bar{Q} < 0$ , 需要：

$$-1 + \alpha k_2^2 < 0 \iff \alpha < \frac{1}{k_2^2},$$

以及：

$$-\alpha + k_1^2 < 0 \iff \alpha > k_1^2.$$

存在这样的  $\alpha$  当且仅当：

$$k_1^2 < \frac{1}{k_2^2}.$$

两边乘以  $k_2^2 > 0$ ：

$$k_1^2 k_2^2 < 1.$$

开平方：

$$k_1 k_2 < 1.$$

这就是小增益定理。单环反馈把互联系统公式变成具体可算的稳定条件。对 passive-like 子系统，严格性可以在输入端和输出端之间交换；对 finite-gain 子系统，适当缩放 dissipativity 参数可以恢复经典小增益条件  $k_1 k_2 < 1$ 。

### 5.1.6 无源子系统

本节研究多个 passive 或 strongly passive 子系统的一般互联。核心问题是：在什么结构条件下，整体  $\bar{Q}$  会变成负定，从而整体稳定？

**定理 16 的设置。** 假设：

$$H + H^T \geq 0,$$

且所有子系统 passive。把子系统分成四类：

1. 前  $n_1$  个是 VSP。
2. 接下来  $n_2$  个是 OSP。
3. 接下来  $n_3$  个是 ISP。
4. 剩余  $n_4 = N - (n_1 + n_2 + n_3)$  个只是 passive。

VSP 同时有 input strict 和 output strict 的负项。OSP 只有输出严格项。ISP 只有输入严格项。普通 passive 没有严格项。因此整体参数可写成：

$$Q = \text{diag}(-\Lambda_1, -\Lambda_2, 0, 0),$$

$$S = I,$$

$$R = \text{diag}(-\Lambda_3, 0, -\Lambda_4, 0),$$

其中  $\Lambda_i$  都是正定对角矩阵。解释：

- $-\Lambda_1$ ：VSP 子系统的 output strict 项。
- $-\Lambda_2$ ：OSP 子系统的 output strict 项。

- $-\Lambda_3$ : VSP 子系统的 input strict 项。
- $-\Lambda_4$ : ISP 子系统的 input strict 项。

把互联矩阵按四组分块：

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix}.$$

定理的充分条件是：矩阵

$$H_{\text{part}} = \begin{bmatrix} H_{13} & H_{14} \\ H_{33} & H_{34} \end{bmatrix}$$

的列线性无关。

**为什么这个条件能保证稳定。** 因为  $S = I$ ，整体输出矩阵为：

$$\bar{Q} = Q - H - H^T + H^T R H.$$

由假设：

$$H + H^T \geq 0,$$

所以：

$$-(H + H^T) \leq 0.$$

又因为  $R \leq 0$ ，所以对任意  $y$ ：

$$y^T H^T R H y = (H y)^T R (H y) \leq 0.$$

因此  $\bar{Q}$  是若干半负定项的和：

$$\bar{Q} = Q - (H + H^T) + H^T R H.$$

要证明：

$$\bar{Q} < 0,$$

只需排除存在非零  $y$  使所有负项都为零。先看  $Q$  项：

$$y^T Q y = -y_1^T \Lambda_1 y_1 - y_2^T \Lambda_2 y_2.$$

因为  $\Lambda_1, \Lambda_2 > 0$ ，该项为零只能有：

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0.$$

所以可能逃过输出严格惩罚的向量只能形如：

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

再看  $H^T R H$  项。令：

$$z = Hy.$$

由于：

$$R = \text{diag}(-\Lambda_3, 0, -\Lambda_4, 0),$$

所以：

$$z^T R z = -z_1^T \Lambda_3 z_1 - z_3^T \Lambda_4 z_3.$$

这个为零要求：

$$z_1 = 0, \quad z_3 = 0.$$

对上面受限的  $y = [0, 0, y_3, y_4]^T$ ，有：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{13} & H_{14} \\ H_{33} & H_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

也就是：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix} = H_{\text{part}} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

如果  $H_{\text{part}}$  列线性无关，那么：

$$H_{\text{part}} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = 0$$

只能推出：

$$y_3 = 0, \quad y_4 = 0.$$

于是  $y = 0$ 。这说明不存在非零  $y$  让所有负项同时消失，因此：

$$\bar{Q} < 0.$$

由定理 15，整体稳定。

**定理的直观含义。** 矩阵  $H_{\text{part}}$  的行对应那些有 input strict 性质的子系统，列对应那些没有 output strict 性质的子系统。也就是说：如果某些子系统输出端不严格，那么它们的输出必须通过互联进入某些具有输入严格性的子系统；这样，缺失的输出惩罚可以通过输入惩罚补回来。这就是 input strict 与 output strict 的 trade-off。

**定理 17：不要求 strict passivity 的另一种方法。** 定理 17 考虑所有子系统都是 SISO passive，不要求 strongly passive。如果存在正定对角矩阵：

$$P = \text{diag}(p_1, \dots, p_N) > 0,$$

使：

$$PH + H^T P > 0,$$

则整体稳定。为什么？第  $i$  个 passive 子系统是：

$$(0, 1, 0)$$

dissipative。乘以正数  $p_i > 0$  后，是：

$$(0, p_i, 0)$$

dissipative。把所有子系统合起来：

$$Q = 0, \quad S = P, \quad R = 0.$$

整体输出矩阵：

$$\bar{Q} = Q - SH - H^T S^T + H^T RH.$$

代入：

$$\bar{Q} = 0 - PH - H^T P + 0.$$

所以：

$$\bar{Q} = -(PH + H^T P).$$

若：

$$PH + H^T P > 0,$$

则：

$$\bar{Q} < 0.$$

由定理 15，整体稳定。

**对角  $P$  的意义。** 如果  $P$  不要求对角，那么寻找  $P$  使  $PH + H^T P > 0$  类似普通 Lyapunov 不等式。但这里  $P$  必须是对角矩阵，因为每个  $p_i$  是对应子系统 dissipativity 不等式的正权重，不能随意混合不同子系统。

这就是为什么后面附录要讨论 quasidominant matrices 和 M-matrices：它们给出判断是否存在这种正对角  $P$  的可检验条件。本节给出两条 passive subsystem 稳定路径：

- 定理 16：利用 VSP/OSP/ISP 的严格性在互联中互补。
- 定理 17：对 SISO passive 系统，寻找正对角权重  $P$ ，使  $PH + H^T P > 0$ 。两者都把问题化成了整体  $\bar{Q} < 0$ 。

### 5.1.7 小增益定理

本节把 6.3 的互联系统框架应用于多个 finite-gain 子系统，得到一个小增益稳定定理。

**子系统有限增益参数。** 设第  $i$  个 SISO 子系统有限增益为  $\gamma_i$ 。也就是说：

$$\|y_i\| \leq \gamma_i \|u_i\|.$$

等价地：

$$\|y_i\|^2 \leq \gamma_i^2 \|u_i\|^2.$$

移项：

$$-\|y_i\|^2 + \gamma_i^2 \|u_i\|^2 \geq 0.$$

所以它是：

$$(-1, 0, \gamma_i^2)$$

dissipative。乘以正权重  $p_i > 0$ ，得到：

$$(-p_i, 0, p_i \gamma_i^2)$$

dissipative。定义：

$$P = \text{diag}(p_1, \dots, p_N) > 0,$$

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_N).$$

于是整体：

$$Q = -P, \quad S = 0, \quad R = P\Gamma^2.$$

代入互联系统公式。整体输出矩阵：

$$\bar{Q} = Q - SH - H^T S^T + H^T R H.$$

因为  $S = 0$ ，交叉项消失：

$$\bar{Q} = -P + H^T P \Gamma^2 H.$$

由于  $P$  与  $\Gamma$  都是对角矩阵，它们可交换：

$$P \Gamma^2 = \Gamma P \Gamma.$$

令：

$$A = \Gamma H.$$

则：

$$A^T P A = (\Gamma H)^T P (\Gamma H) = H^T \Gamma P \Gamma H = H^T P \Gamma^2 H.$$

所以：

$$\bar{Q} = -P + A^T P A.$$

要使：

$$\bar{Q} < 0,$$

等价于：

$$-P + A^T P A < 0.$$

两边乘以  $-1$ ，不等号方向反转：

$$P - A^T P A > 0.$$

**定理 18。** 定理说：如果第  $i$  个子系统有限增益为  $\gamma_i$ ，并且每个子系统都是 SISO，令：

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_N), \quad A = \Gamma H.$$

若存在正定对角矩阵  $P$ ，使：

$$P - A^T P A > 0,$$

则整体系统稳定。

**与经典小增益的关系。** 如果没有对角权重  $P$ ，最粗略条件类似：

$$\|A\| < 1.$$

但定理 18 允许选择正对角  $P$ ，相当于给不同子系统通道不同尺度。这通常能减少保守性。原文指出，一个充分但远非必要的检查方法是构造矩阵  $\hat{A}$ ：

$$\hat{a}_{ii} = 1 - |a_{ii}|,$$

$$\hat{a}_{ij} = -|a_{ij}| \quad (j \neq i).$$

如果  $\hat{A}$  的所有主子式为正则，即它是一个 M-matrix，则存在合适的  $P$ 。这些矩阵结果在附录中解释。

**小增益判据的局限。** M-matrix 检查的优点是容易验证。缺点是它本质上偏向“弱耦合系统”：每个子系统本身稳定，互联不要把它们破坏。但实际中也有另一类情形：反馈可能改善稳定性。对这类系统，小增益/M-matrix 条件可能过于保守。定理 18 是多子系统版本的小增益定理：

$$P - A^T P A > 0$$

是核心条件。它把 finite-gain 子系统的稳定互联问题转化为寻找一个正对角缩放矩阵  $P$ 。

### 5.1.8 锥形子系统

本节处理 conic systems，也就是输入输出关系落在某个 sector 内或外的系统。conicity 在非线性系统中很重要，因为许多静态非线性和频域条件都可表达为 sector/cone 条件。

**interior conic。** SISO 系统若满足：

$$\langle y - au, bu - y \rangle_T \geq 0,$$

其中  $b \geq a$ ，则称它在 sector  $[a, b]$  内，即 interior conic。展开 integrand：

$$(y - au)(bu - y).$$

按分配律：

$$= y \cdot bu - y \cdot y - au \cdot bu + au \cdot y.$$

逐项整理：

$$= byu - y^2 - abu^2 + au y.$$

因为 SISO 情况下  $yu = uy$ ，所以：

$$= -y^2 + (a + b)yu - abu^2.$$

写成  $(Q, S, R)$  供给率：

$$Qy^2 + 2Syu + Ru^2.$$

比较系数：

$$Q = -1, \quad 2S = a + b, \quad R = -ab.$$

所以：

$$S = \frac{1}{2}(a + b).$$

因此 interior conic 对应：

$$\left(-1, \frac{1}{2}(a + b), -ab\right).$$

**exterior conic**。若：

$$\langle y - au, bu - y \rangle_T \leq 0,$$

则称为 exterior conic，即在 sector 外。把不等式乘以  $-1$ ，得到：

$$\langle -(y - au)(bu - y) \rangle_T \geq 0.$$

因此对应参数是 interior conic 的相反数：

$$\left(1, -\frac{1}{2}(a + b), ab\right).$$

原文统一写为：

$$\left(-\sigma_i, \frac{1}{2}(a_i + b_i)\sigma_i, -a_i b_i \sigma_i\right),$$

其中：

$$\sigma_i = +1$$

表示 interior conic,

$$\sigma_i = -1$$

表示 exterior conic。

**有限增益是 conic 的特例。** 如果系统有限增益  $\gamma$ ，即：

$$y^2 \leq \gamma^2 u^2,$$

则：

$$\gamma^2 u^2 - y^2 \geq 0.$$

这可以写成：

$$(y + \gamma u)(\gamma u - y) \geq 0.$$

对应 sector：

$$[-\gamma, \gamma].$$

所以 finite-gain systems 是 interior conic systems 的特例。

**矩阵定义。** 对  $N$  个 conic 子系统，定义：

$$A = \text{diag}(a_1, \dots, a_N),$$

$$B = \text{diag}(b_1, \dots, b_N),$$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_N).$$

再定义：

$$C = \frac{1}{2}(A + B),$$

$$D = \frac{1}{2}(B - A).$$

其中：

- $C$  是 sector 中点。
- $D$  是 sector 半宽。

因为：

$$\frac{1}{2}(a + b)$$

是区间  $[a, b]$  中点，而：

$$\frac{1}{2}(b - a)$$

是半宽。

**定理 19.** 定理说: conic 子系统互联稳定, 如果存在正定对角矩阵  $P$ , 使:

$$(I + CH)^T P \Sigma (I + CH) - (DH)^T P \Sigma (DH) > 0.$$

**推导思路.** 给每个子系统乘以正权重  $p_i$ , 整体参数为:

$$Q = -P\Sigma,$$

$$S = CP\Sigma,$$

$$R = -ABP\Sigma.$$

代入:

$$\bar{Q} = Q - SH - H^T S^T + H^T R H.$$

得到:

$$\bar{Q} = -P\Sigma - CP\Sigma H - H^T P\Sigma C - H^T ABP\Sigma H.$$

另一方面, 展开定理中的矩阵:

$$(I + CH)^T P \Sigma (I + CH)$$

$$= P\Sigma + H^T CP\Sigma + P\Sigma CH + H^T CP\Sigma CH.$$

因为  $A, B, C, D, P, \Sigma$  都是对角矩阵, 可以相互交换. 并且:

$$C^2 - D^2 = AB.$$

验证:

$$\begin{aligned} C^2 - D^2 &= \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B-A}{2}\right)^2 \\ &= \frac{A^2 + 2AB + B^2}{4} - \frac{B^2 - 2AB + A^2}{4} \\ &= \frac{4AB}{4} = AB. \end{aligned}$$

于是:

$$H^T CP\Sigma CH - H^T DP\Sigma DH = H^T (C^2 - D^2) P\Sigma H = H^T ABP\Sigma H.$$

因此：

$$(I + CH)^T P \Sigma (I + CH) - (DH)^T P \Sigma (DH)$$

正好是  $-\bar{Q}$ 。所以若该矩阵正定，就有：

$$\bar{Q} < 0.$$

由定理 15，整体稳定。conic stability theorem 把 sector 条件统一进 dissipativity 框架。它比纯小增益更灵活，因为 sector  $[a, b]$  不只是约束输出幅值，还包含输入输出之间的相位/符号/斜率关系。

### 5.1.9 例 s

本节用两个例子说明：同样的互联系统，用不同矩阵判据会得到不同保守程度的稳定范围。重点不是计算某个具体系统，而是理解“明显条件”不一定是最好的条件。

**例 1：两个有限增益子系统。** 设有两个 finite-gain 子系统，每个增益不超过：

$$\frac{1}{2}.$$

互联矩阵：

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -k \end{bmatrix}.$$

由定理 18，定义：

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

因此：

$$A = \Gamma H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{k}{2} \end{bmatrix}.$$

最简单的附录 M-matrix 方法构造：

$$\hat{a}_{ii} = 1 - |a_{ii}|, \quad \hat{a}_{ij} = -|a_{ij}| \quad (j \neq i).$$

所以：

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \frac{|k|}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \frac{|k|}{2} \end{bmatrix}.$$

正主子式要求：第一主子式：

$$\frac{1}{2} > 0.$$

第二个对角主子式：

$$1 - \frac{|k|}{2} > 0 \iff |k| < 2.$$

行列式：

$$\det \hat{A} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{|k|}{2} \right) - \frac{1}{4}.$$

展开：

$$= \frac{1}{2} - \frac{|k|}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{|k|}{4} = \frac{1 - |k|}{4}.$$

要求：

$$\det \hat{A} > 0 \iff |k| < 1.$$

所以这个方法给出：

$$|k| < 1.$$

原文接着说，可以改用另一种附录判据：令

$$F = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

当  $F$  是  $2 \times 2$  矩阵时，存在正对角  $P$  使：

$$PF + F^T P > 0$$

等价于  $F$  有正主子式。这个条件给出更宽范围：

$$-1 < k < \frac{5}{3}.$$

这说明：最直接的 M-matrix 条件只是充分条件，可能保守。

**例 2：三个子系统的互联。** 第二个例子有三个子系统，带局部反馈增益：

$$\alpha, \beta, \gamma,$$

以及整体正反馈增益：

$$k.$$

互联矩阵为：

$$H = \begin{bmatrix} -1 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & -k \\ 0 & -1 & \gamma \end{bmatrix}.$$

定理 16 在这里不能给出稳定性，因为没有子系统是 VSP 或 ISP。于是尝试定理 17：寻找正对角矩阵  $P$ ，使：

$$PH + H^T P > 0.$$

一个充分条件是  $H$  quasidominant。原文给出的对应范围是：

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad |k| < \alpha\beta\gamma.$$

但使用 decision theory 方法，可以得到存在合适  $P$  的充要条件：

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad -8\alpha\beta\gamma < k < \alpha\beta\gamma.$$

这个范围明显更大，尤其是负方向允许到  $-8\alpha\beta\gamma$ 。两个例子共同说明：

1. dissipativity 框架能统一多种稳定判据。
2. 同一个稳定问题可以有多个充分条件。
3. 越容易检查的条件通常越保守。
4. 选择好的矩阵变换或对角缩放，可能显著扩大可证明稳定的参数范围。  
这为后面附录中的矩阵工具埋下伏笔。

## 第六章 失稳与频域图形判据

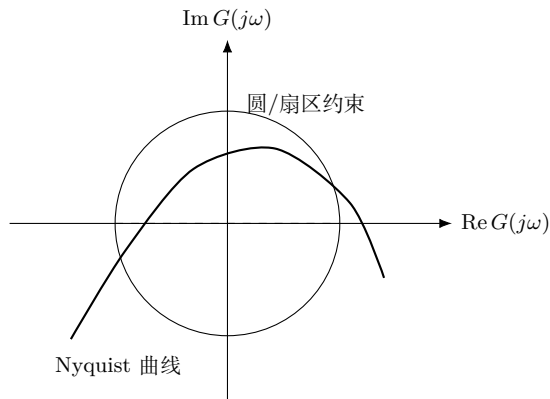


图 6.1 频域图形判据：Nyquist 曲线、圆、半平面与乘子。

如果耗散性能够推出稳定性，那么它的反面也能提供失稳判据。本章先讲输入输出和状态空间层面的失稳逻辑，再转向频域判据。频域部分的重点不是背公式，而是理解：二次供给率在频域中变成 Hermitian 矩阵非负性；标量情况下，它又可画成圆、半平面、Popov 曲线或乘子变换后的几何约束。

### 6.1 失稳判据：耗散性的反面

#### 6.1.1 不稳定性判据的语言

第 6 章给出了一系列稳定的充分条件。第 7 章反过来问：能不能得到不稳定的充分条件？一般来说，想得到“稳定的充要条件”很难。Moylan 的策略是：

1. 先给出稳定的充分条件。
2. 再给出不稳定的充分条件。
3. 用两边夹逼的方式理解 stability 和 dissipativity 之间的空隙。

本章的核心洞见是：当  $Q \leq 0$  时，如果一个系统满足某种“最终/循环意义下的耗散性”，但又不满足真正的 dissipativity，那么这通常指向不稳定。

**回顾输入输出稳定性。** 为了讨论不稳定，先回到第 2 章的信号空间。基本信号空间：

$$U, \quad Y$$

分别是小输入信号空间和小输出信号空间。通常它们是有限能量空间，比如  $L_2$ 。扩展空间：

$$U_e = \{u : P_T u \in U \text{ for all } T\},$$

$$Y_e = \{y : P_T y \in Y \text{ for all } T\}.$$

这里:

- $P_T$  是 causal truncation operator。
- $P_T u$  表示把  $u$  截断到时间  $T$  之前。
- $u \in U_e$  表示: 虽然  $u$  整体可能不是有限能量, 但任意有限时间窗口内都是有限能量。

系统:

$$y = Gu$$

被看成从  $U_e$  到  $Y_e$  的映射。input-output stable 的定义:

$$u \in U \implies Gu \in Y.$$

也就是说, 小输入产生小输出。定义:

$$K(G) = \{u \in U : Gu \in Y\}.$$

那么:

$$G \text{ input-output stable} \iff K(G) = U.$$

如果存在某个  $u \in U$  使  $Gu \notin Y$ , 则  $G$  input-output unstable。

**回顾 UVD。** 定义 17: 系统  $y = Gu$  是  $(Q, S, R)$  ultimately virtually dissipative, 简称 UVD, 如果:

$$\langle y, Qy \rangle + 2\langle y, Su \rangle + \langle u, Ru \rangle \geq 0$$

对所有:

$$u \in K(G)$$

成立。注意这里不是对所有  $u \in U$  成立, 而只对那些产生小输出的输入成立。这就是“ultimately virtually”的含义: 它只在输入输出都足够良好的轨道上检查供给率。

**ultimately dissipative**。定义 18: 如果系统是 UVD, 并且:

$$K(G) = U,$$

则称它 ultimately dissipative。也就是说:

$$\text{ultimately dissipative} = \text{UVD} + \text{input-output stable}.$$

这一定义很关键。它意味着: 若一个系统 UVD 但不 dissipative, 那么如果它还 input-output stable, 就会很接近 ultimately dissipative。下一节正是利用这个逻辑推出矛盾。

**因果性**。本章还需要 causality:

$$P_T G P_T = P_T G.$$

意思是: 时间  $T$  之前的输出只由时间  $T$  之前的输入决定。这在讨论输入输出不稳定时很重要, 因为我们会把一个扩展输入  $u \in U_e$  截断成  $P_T u \in U$ , 然后比较截断前后的输出历史。第 7.1 节建立本章语言:

- $K(G)$  是小输入中能产生小输出的集合。
- stable 等价于  $K(G) = U$ 。
- UVD 只在  $K(G)$  上检查非截断供给率。
- ultimately dissipative 是 UVD 加 input-output stable。
- causality 让截断论证成立。

### 6.1.2 基本输入输出不稳定性结果

本节证明两个输入输出层面的结果:

1. 定理 20: 当  $Q \leq 0$  且系统 causal 时, ultimately dissipative 推出 dissipative。
2. 定理 21: 当  $Q \leq 0$  且系统 causal 时, 如果系统 UVD 但不是 dissipative, 则系统 input-output unstable。

这两个定理合起来给出一个非常清楚的逻辑链:

$$\text{UVD} + \text{stable} \implies \text{ultimately dissipative} \implies \text{dissipative}.$$

所以:

$$\text{UVD but not dissipative} \implies \text{not stable}.$$

**定理 20: ultimately dissipative 推出 dissipative**。假设:

- $G$  causal。
- $G$  是  $(Q, S, R)$  ultimately dissipative。
- $Q \leq 0$ 。

要证明:  $G$  是  $(Q, S, R)$  dissipative.

**第一步: ultimately dissipative 给出的全时域不等式。** ultimately dissipative 意味着:

$$K(G) = U$$

且对所有  $u \in U$ :

$$\langle y, Qy \rangle + 2\langle y, Su \rangle + \langle u, Ru \rangle \geq 0.$$

这里  $y = Gu$ . dissipative 要求的是截断形式: 对所有  $u \in U_e$  和所有  $T$ :

$$\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq 0.$$

所以证明任务是: 从完整小信号空间上的不等式, 推出任意扩展输入的截断不等式。

**第二步: 截断输入。** 任取:

$$u \in U_e.$$

任取截断时间  $T$ . 定义:

$$u_1 = P_T u.$$

因为  $u \in U_e$ , 所以:

$$u_1 \in U.$$

令:

$$y = Gu, \quad y_1 = Gu_1.$$

由于  $u_1 \in U$ , ultimately dissipative 给出:

$$\langle y_1, Qy_1 \rangle + 2\langle y_1, Su_1 \rangle + \langle u_1, Ru_1 \rangle \geq 0.$$

现在要把这个完整内积不等式转换成关于  $u, y$  的截断内积。

**第三步: 利用因果性比较过去输出。** 因果性:

$$P_T G P_T = P_T G.$$

于是:

$$P_T y_1 = P_T G u_1 = P_T G (P_T u).$$

由因果性:

$$P_T G (P_T u) = P_T G u = P_T y.$$

所以:

$$P_T y_1 = P_T y.$$

也就是说,  $y_1$  和  $y$  在时间  $T$  之前完全相同。它们在  $T$  之后可能不同, 但截断内积只关心过去。因为  $u_1 = P_T u$ , 所以  $u_1$  在  $T$  之后为零。因此:

$$\langle y_1, S u_1 \rangle = \langle y, S u \rangle_T,$$

$$\langle u_1, R u_1 \rangle = \langle u, R u \rangle_T.$$

**第四步: 处理  $Q$  项。** 由于  $Q \leq 0$ , 可以写成:

$$Q = -M^* M.$$

于是:

$$\langle y_1, Q y_1 \rangle = -\langle M y_1, M y_1 \rangle = -\|M y_1\|^2.$$

完整范数大于等于截断范数:

$$\|M y_1\|^2 \geq \|P_T M y_1\|^2.$$

乘以负号, 不等号反向:

$$-\|M y_1\|^2 \leq -\|P_T M y_1\|^2.$$

所以:

$$\langle y_1, Q y_1 \rangle \leq -\langle P_T M y_1, P_T M y_1 \rangle.$$

因为  $M$  是 memoryless operator, 所以它与截断可交换:

$$P_T M y_1 = P_T M P_T y_1.$$

又因为:

$$P_T y_1 = P_T y,$$

得到：

$$P_T M y_1 = P_T M y.$$

于是：

$$-\langle P_T M y_1, P_T M y_1 \rangle = -\langle P_T M y, P_T M y \rangle = \langle y, Q y \rangle_T.$$

因此：

$$\langle y_1, Q y_1 \rangle \leq \langle y, Q y \rangle_T.$$

**第五步：合并得到截断耗散不等式。从：**

$$0 \leq \langle y_1, Q y_1 \rangle + 2\langle y_1, S u_1 \rangle + \langle u_1, R u_1 \rangle$$

以及：

$$\langle y_1, Q y_1 \rangle \leq \langle y, Q y \rangle_T,$$

$$\langle y_1, S u_1 \rangle = \langle y, S u \rangle_T,$$

$$\langle u_1, R u_1 \rangle = \langle u, R u \rangle_T,$$

得到：

$$0 \leq \langle y, Q y \rangle_T + 2\langle y, S u \rangle_T + \langle u, R u \rangle_T.$$

这正是  $(Q, S, R)$ -dissipativity。

**定理 21：UVD 但非 dissipative 推出 input-output unstable。假设：**

- $G$  causal。
- $G$  是  $(Q, S, R)$  UVD。
- $G$  不是  $(Q, S, R)$  dissipative。
- $Q \leq 0$ 。

要证明： $G$  input-output unstable。反证。假设  $G$  input-output stable，则：

$$K(G) = U.$$

又因为  $G$  UVD，所以：

$G$  ultimately dissipative.

由定理 20：

$G$  dissipative.

这与假设“不是 dissipative”矛盾。所以  $G$  不可能 input-output stable, 也就是 input-output unstable。

**这个结论的意义。** 当  $Q < 0$  时, 第 6 章说:

dissipative  $\implies$  stable.

本节说:

UVD but not dissipative  $\implies$  unstable.

这给出了一个漂亮对称性:

- 真正的 dissipativity 足以推出稳定。
- 只有 ultimate virtual dissipativity 而没有真正 dissipativity, 则推出不稳定。但这个对称性依赖:

$$Q \leq 0.$$

若  $Q$  符号不定, 类似结论一般不能成立。

### 6.1.3 状态空间不稳定性结果

本节把上一节的输入输出不稳定思想转成状态空间语言。对应关系是:

- 输入输出中的 UVD 近似对应状态空间中的 cyclodissipativity。
- 输入输出中的 dissipativity 对应存在非负 storage function。
- 因此, 若系统 cyclodissipative 但不是 dissipative, 且  $Q \leq 0$ , 则它不可能是 Lyapunov 意义下的渐近稳定。

**三种状态稳定概念。** 零输入下, 状态轨迹  $x(t)$  可能有几种行为:

1. Lyapunov stable: 任意初始状态下,  $x(t)$  对所有  $t$  有界。
2. Asymptotically stable:  $x(t)$  有界且:

$$x(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

3. Lyapunov unstable: 存在某些初始状态, 使:

$$\|x(t)\| \rightarrow \infty$$

或至少无界增长。本节证明的是“不渐近稳定”, 不一定证明“无界发散”。这点很重要。

**定理 22。** 定理说：若系统  $G$  是  $(Q, S, R)$ -cyclo-dissipative, 但不是  $(Q, S, R)$ -dissipative, 且：

$$Q \leq 0,$$

则  $G$  不是 Lyapunov 意义下渐近稳定。

**证明细节。** cyclo-dissipativity 意味着存在 virtual storage function  $\phi(x)$ , 满足：

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} [y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u] dt \geq \phi(x(t_1)).$$

令零输入：

$$u(t) = 0.$$

则：

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} y^T Q y dt \geq \phi(x(t_1)).$$

因为：

$$Q \leq 0,$$

所以：

$$y^T Q y \leq 0.$$

于是：

$$\int_{t_0}^{t_1} y^T Q y dt \leq 0.$$

因此：

$$\phi(x(t_1)) \leq \phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} y^T Q y dt \leq \phi(x(t_0)).$$

所以沿零输入轨迹：

$$\phi(x(t))$$

单调不增。现在反设系统渐近稳定。则对任意初始状态：

$$x(t) \rightarrow 0.$$

把 virtual storage function 规范化为：

$$\phi(0) = 0$$

后, 若  $\phi$  沿轨迹在原点连续, 就有:

$$\phi(x(t)) \rightarrow \phi(0) = 0.$$

又因为  $\phi(x(t))$  单调不增并最终趋向 0, 所以初值必须满足:

$$\phi(x(t_0)) \geq 0.$$

如果某个初始状态有  $\phi(x(t_0)) < 0$ , 单调不增的函数不可能最后升到 0. 由于初始状态任意, 得到:

$$\phi(x) \geq 0 \quad \text{for all } x.$$

这意味着 virtual storage function 实际上是非负 storage function. 于是系统就是  $(Q, S, R)$ -dissipative. 这与假设 “cyclodissipative 但不是 dissipative” 矛盾. 因此系统不可能渐近稳定.

**频域直觉.** 原文给出线性系统的直观解释. 后面第 8 章会证明, 线性系统的 dissipativity 可用频域矩阵:

$$M(s) = G(s)^*QG(s) + G(s)^*S + S^TG(s) + R$$

来判断. 这里:

- $G(s)$  是传递函数矩阵.
- $G(s)^*$  是在频域中的共轭转置.
- $s$  是复频率变量.

dissipativity 大致要求:

$$M(s) \geq 0$$

在整个右半平面:

$$\operatorname{Re} s \geq 0$$

成立. cyclodissipativity 只要求:

$$M(j\omega) \geq 0$$

对所有实频率  $\omega$  成立. 也就是说:

- dissipativity 检查右半平面内部和边界.
- cyclodissipativity 只检查边界  $j\omega$  轴.

复分析中, 函数在区域内部的行为与边界值之间的关系, 通常取决于区域内的极点数量。右半平面极点正是线性系统不稳定模态。因此:

cyclodissipative but not dissipative

和 unstable poles 相关, 是非常自然的。状态空间版本的结论是: 若  $Q \leq 0$ , 一个系统如果只有 cyclodissipativity 而没有真正 dissipativity, 那么它不可能全局渐近稳定到原点。它可能发散, 也可能进入极限环, 还可能收敛到非原点平衡点; 定理只排除“所有初始状态都趋向原点”。

#### 6.1.4 互联系统的不稳定性

本节把不稳定结论推广到互联系统, 核心问题是: 如果多个子系统互联, 其中至少一个子系统只是 UVD/cyclodissipative 而不是 dissipative, 那么整体什么时候必然不稳定?

**互联系统设置。** 有  $N$  个子系统:

$$y_i = G_i u_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

把输入输出堆叠:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}.$$

把参数组成块对角矩阵:

$$Q = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_N),$$

$$S = \text{diag}(S_1, \dots, S_N),$$

$$R = \text{diag}(R_1, \dots, R_N).$$

互联为:

$$u = u_{\text{ext}} - Hy.$$

代入和第 6 章一样得到:

$$\hat{Q} = Q - SH - H^T S^T + H^T R H,$$

$$\hat{S} = S - H^T R,$$

$$\hat{R} = R.$$

因此整体系统是：

$$(\hat{Q}, \hat{S}, \hat{R})$$

UVD 或 cyclo-dissipative。

**强制指定内部输入的思想实验。** 为了证明不稳定，作者考虑一个思想实验：选择外部输入  $u_{\text{ext}}$ ，使内部输入  $u_i$  等于我们想要的值  $\bar{u}_i$ 。如果希望：

$$u_i = \bar{u}_i$$

并且：

$$\bar{y}_i = G_i \bar{u}_i,$$

则可设置：

$$u_{\text{ext},i} = \bar{u}_i + \sum_{j=1}^N H_{ij} \bar{y}_j.$$

因为互联方程是：

$$u_i = u_{\text{ext},i} - \sum_{j=1}^N H_{ij} y_j.$$

代入所选外部输入：

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i + \sum_{j=1}^N H_{ij} \bar{y}_j - \sum_{j=1}^N H_{ij} y_j \\ &= \bar{u}_i + \sum_{j=1}^N H_{ij} (\bar{y}_j - y_j). \end{aligned}$$

显然：

$$u_i = \bar{u}_i, \quad y_i = \bar{y}_i$$

是一个解。对非线性系统，可能还有其他解。作者指出这不妨碍不稳定性证明：稳定要求所有可能解都稳定；要证明不稳定，只需要展示一个解不稳定或违反 dissipativity。

**定理 23: 输入输出互联不稳定。** 假设:

- 整体互联系统 causal。
- 每个子系统  $G_i$  是  $(Q_i, S_i, R_i)$  UVD。
- 至少一个子系统  $G_k$  不是  $(Q_k, S_k, R_k)$  dissipative。
- $\hat{Q} \leq 0$ 。
- 并且满足以下至少一个附加条件:
  1. 至少一个非 dissipative 子系统是线性的。
  2. 除了可能一个非 dissipative 子系统外, 每个子系统要么 unbiased, 即  $G_i 0 = 0$ , 要么  $Q_i \leq 0$ 。

则整体系统 input-output unstable。

**证明结构。** 因为  $G_k$  不是 dissipative, 存在某个截断时间  $T$ 、某个输入  $\bar{u}_k$ 、输出:

$$\bar{y}_k = G_k \bar{u}_k$$

使:

$$\langle \bar{y}_k, Q_k \bar{y}_k \rangle_T + 2 \langle \bar{y}_k, S_k \bar{u}_k \rangle_T + \langle \bar{u}_k, R_k \bar{u}_k \rangle_T < 0.$$

也就是说, 第  $k$  个子系统有一个“坏输入”, 让耗散不等式失败。现在选择外部输入, 使:

$$u_k = \bar{u}_k,$$

而其他子系统:

$$u_i = 0, \quad i \neq k.$$

按前面的思想实验, 这样的外部输入可以构造出来, 并且至少存在一个解实现这些内部输入。整体供给率满足恒等式:

$$\begin{aligned} & \langle y, \hat{Q} y \rangle_T + 2 \langle y, \hat{S} u_{\text{ext}} \rangle_T + \langle u_{\text{ext}}, \hat{R} u_{\text{ext}} \rangle_T \\ &= \sum_{i=1}^N [\langle y_i, Q_i y_i \rangle_T + 2 \langle y_i, S_i u_i \rangle_T + \langle u_i, R_i u_i \rangle_T]. \end{aligned}$$

右侧第  $k$  项为负。接下来要说明其他项不能抵消它。

**情形 1: 非 dissipative 子系统是线性的。** 如果  $G_k$  线性, 则可以把坏输入放大:

$$u_k = \lambda \bar{u}_k.$$

线性给出:

$$y_k = \lambda \bar{y}_k.$$

第  $k$  项供给率是二次型，因此缩放为：

$$\lambda^2 [\langle \bar{y}_k, Q_k \bar{y}_k \rangle_T + 2\langle \bar{y}_k, S_k \bar{u}_k \rangle_T + \langle \bar{u}_k, R_k \bar{u}_k \rangle_T].$$

括号内是负数。令  $\lambda$  足够大，这个负项可以压倒其他有限项，使整体供给率为负。于是整体不可能是  $(\hat{Q}, \hat{S}, \hat{R})$ -dissipative。但整体是 UVD，且  $\hat{Q} \leq 0$ ，所以由定理 21，整体 input-output unstable。

**情形 2：其他子系统无偏或  $Q_i \leq 0$ 。** 如果  $G_k$  非线性，不能简单靠缩放。于是用第二个附加条件。对  $i \neq k$ ，我们选择：

$$u_i = 0.$$

如果  $G_i$  unbiased，则：

$$G_i 0 = 0,$$

所以：

$$y_i = 0.$$

此时第  $i$  项供给率为零。如果  $Q_i \leq 0$ ，而  $u_i = 0$ ，则第  $i$  项变成：

$$\langle y_i, Q_i y_i \rangle_T \leq 0.$$

因此其他项都不为正。第  $k$  项已经为负，所以总和为负。同样推出整体不是 dissipative，再由定理 21 推出 input-output unstable。

**定理 24：状态空间互联不稳定。** 状态空间版本假设：

- 整体互联系统有状态空间表示。
- 每个子系统  $G_i$  是  $(Q_i, S_i, R_i)$ -cyclodissipative。
- 至少一个子系统不是  $(Q_i, S_i, R_i)$ -dissipative。
- $\hat{Q} \leq 0$ 。

则整体系统不是 Lyapunov 意义下渐近稳定。

**证明细节。** 整体系统是：

$$(\hat{Q}, \hat{S}, \hat{R})$$

cyclodissipative，所以存在整体 virtual storage function  $\phi(x)$ ，满足零外部输入时：

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} y(t)^T \hat{Q}y(t) dt \geq \phi(x(t_1)).$$

因为:

$$\hat{Q} \leq 0,$$

所以:

$$y^T \hat{Q}y \leq 0.$$

于是:

$$\phi(x(t_1)) \leq \phi(x(t_0)).$$

即  $\phi(x(t))$  单调不减。由于至少一个子系统 cyclo-dissipative 但不是 dissipative, 整体 virtual storage function 可以在某些状态取负值。也就是说, 存在状态  $x$ , 使:

$$\phi(x) < 0.$$

若选这个  $x$  为初始状态, 则沿轨迹:

$$\phi(x(t)) \leq \phi(x(0)) < 0.$$

如果系统渐近稳定到原点, 且规范化:

$$\phi(0) = 0,$$

那么应有:

$$\phi(x(t)) \rightarrow 0.$$

但一个始终小于负数的单调不减函数不可能趋向 0。矛盾。所以整体系统不渐近稳定。

**定理没有说什么。** 定理 24 不保证状态无界。它只排除渐近稳定到原点。可能出现:

1. 状态进入极限环。
2. 状态收敛到非原点平衡点。
3. 状态发散。
4. 原点局部不稳定但存在其他吸引集。

若要得到更强的不稳定结论, 需要更多信息, 例如 virtual storage function 的具体结构、线性性、或更强的  $\hat{Q} < 0$  与可观测性条件。第 7.4 节将“UVD/cyclo-dissipative 但非 dissipative 导致不稳定”的思想扩展到互联系统。它与第 6 章形成镜像:

- 第 6 章：子系统 dissipativity 组合出整体  $\bar{Q} < 0$ ，推出稳定。
- 第 7 章：子系统中存在非 dissipativity，且整体  $\hat{Q} \leq 0$ ，推出不稳定或非渐近稳定。

## 6.2 频域判据：圆、半平面、乘子与图形化检验

### 6.2.1 引言

**本节物理背景。** 前面几章主要在时间域和状态空间里讨论 dissipativity。第 8 章转向频域。频域方法在控制工程里非常重要，因为很多线性系统的输入输出行为可以通过传递函数：

$$G(s)$$

来描述，其中：

- $s \in \mathbb{C}$  是复频率变量。
- $s = j\omega$  表示纯虚轴上的稳态正弦频率。
- $\omega \in \mathbb{R}$  是角频率。

当系统输入是正弦波时，线性系统输出在稳态下仍是同频率正弦波，只是幅值和相位改变。这些改变由  $G(j\omega)$  决定。因此，把  $\omega$  从  $-\infty$  扫到  $+\infty$ ，得到的曲线：

$$G(j\omega)$$

就是 Nyquist plot。很多稳定判据，如 Nyquist criterion、circle criterion、Popov criterion，都可以看成对这条曲线的几何限制。第 8 章的目标不是重新发明经典频域稳定判据，而是把它们放进 dissipativity 框架中：

1. 先用频域条件判断线性子系统的 cyclo-dissipativeness 或 dissipativeness。
2. 再把这些子系统的  $(Q, S, R)$  参数送回第 6 章互联系统稳定定理。

这个视角的变化很重要。传统 circle criteria 通常把整个非线性系统改写成单环反馈形式。Moylan 的观点是：不必强行把复杂系统塞进一个单环结构。可以把系统按物理结构拆成多个子系统，对每个线性子系统单独做频域 dissipativity 测试，再用互联系统定理组合。

**circle criterion 的基本图像。** 在 SISO 情况下，若：

$$G(j\omega)$$

在复平面中避开某个圆，或位于某个圆内/外，就能推出某种  $(Q, S, R)$ -cyclo-dissipativity。若再加上极点绕数条件，就能推出 dissipativity。这类判据叫 circle criteria。特殊情形包括：

- 圆退化成直线：对应 passivity-like 判据。

- 圆缩成点：对应经典 Nyquist 判据。
- 使用 Popov plot：把纵轴从  $\text{Im } G(j\omega)$  改成  $\omega \text{Im } G(j\omega)$ ，得到 Popov criterion。

**本章的结构。** 第 8 章按以下顺序推进：

1. 一般频域判据：建立  $M(s)$  与 dissipativity 的关系。
2. 标量图形判据：给 SISO 系统完整圆判据目录。
3. 多变量图形判据：用特征值、奇异值、Nyquist bands 和 M-matrix 条件处理 MIMO 系统。
4. multiplier 方法：引入额外线性动态  $Z(s)$ ，得到 Popov 型和更一般的图形判据。
5. 离散时间版本：把右半平面换成单位圆外部。
6. 文献说明：把这些结果放回历史脉络。

**cyclodissipativeness 为什么先于 dissipativeness。** 频域图形最容易检查的是：

$$G(j\omega)$$

也就是虚轴上的频率响应。因此它天然对应 cyclodissipativeness 或 UVD，因为这类性质只需要检查边界行为。dissipativeness 更强，通常要看整个闭右半平面：

$$\text{Re } s \geq 0.$$

所以本章很多判据先证明 cyclodissipativeness，再通过稳定性、极点条件、Nyquist 绕数或定理 26/27 推到 dissipativity。

### 6.2.2 一般频域判据

本节建立第 8 章的总公式：对线性系统， $(Q, S, R)$ -dissipativity 可以通过一个频域矩阵  $M(s)$  判断。

**连续时间线性系统。** 考虑状态空间系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx + Du.$$

这里：

- $x \in \mathbb{R}^n$ ：状态。
- $u \in L_{2e}^m$ ：扩展  $L_2$  输入， $m$  维。
- $y \in L_{2e}^p$ ：扩展  $L_2$  输出， $p$  维。

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 。
- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 。
- $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ 。

传递函数矩阵为：

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B.$$

本章默认状态空间实现 minimal, 即同时 controllable 和 observable。原因是：传递函数看不见不可控或不可观测模态。若实现不是 minimal, 频域图形无法判断隐藏模态的稳定性。

从供给率到频域矩阵  $M(s)$ 。时间域供给率积分是：

$$\int_0^T w(u(t), y(t)) dt = \int_0^T [y(t)^T Q y(t) + 2y(t)^T S u(t) + u(t)^T R u(t)] dt.$$

在频域中, 令：

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}, \quad Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}.$$

线性系统满足：

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

供给率的频域二次型为：

$$Y(s)^* Q Y(s) + 2Y(s)^* S U(s) + U(s)^* R U(s).$$

把  $Y = GU$  代入：

$$(GU)^* Q (GU) + 2(GU)^* S U + U^* R U.$$

先展开：

$$(GU)^* = U^* G^*.$$

所以第一项：

$$(GU)^* Q (GU) = U^* G^* Q G U.$$

第二项：

$$2(GU)^* S U = 2U^* G^* S U.$$

为了保持 Hermitian 形式, 写成：

$$U^* (G^* S + S^T G) U$$

在实系统且供给率为实标量时, 这与  $2 \operatorname{Re}(Y^* S U)$  对应。因此定义:

$$M(s) = R + S^T G(s) + G(s)^* S + G(s)^* Q G(s).$$

于是频域供给率为:

$$U(s)^* M(s) U(s).$$

若:

$$M(s) \geq 0,$$

则对所有频率分量, 供给率频域密度非负。

$M(s) \geq 0$  的含义。因为  $M(s)$  是 Hermitian 矩阵,  $M(s) \geq 0$  表示:

$$v^* M(s) v \geq 0$$

对所有复向量  $v$  成立。如果  $M(s)$  不是 Hermitian, 就不能用这种半正定顺序。但这里由于  $Q, R$  自伴, 且  $G^* Q G$ 、 $G^* S + S^T G$  的组合是自伴的, 所以  $M(s)$  自伴。

**定理 25: 虚轴条件等价于 cyclodissipativeness。** 定理说: 系统  $G$  是  $(Q, S, R)$ -cyclodissipative, 当且仅当:

$$M(j\omega) \geq 0$$

对所有实数  $\omega$  成立, 排除  $j\omega$  是  $G(s)$  极点的点。

**定理 25 的必要性。** 假设系统 cyclodissipative。取一个频率  $\omega_0$ , 且  $j\omega_0$  不是极点。选择输入:

$$u(t) = \operatorname{Re} (k e^{j\omega_0 t}),$$

其中  $k$  是任意复向量。选择初始状态:

$$x(0) = \operatorname{Re} ((j\omega_0 I - A)^{-1} B k).$$

这个初始条件使状态响应成为纯周期运动, 没有额外暂态。于是:

$$y(t) = \operatorname{Re} (G(j\omega_0) k e^{j\omega_0 t}).$$

一个周期  $T$  后:

$$x(T) = x(0).$$

cyclodissipativity 对闭合轨迹给出:

$$\int_0^T w(u(t), y(t)) dt \geq 0.$$

对正弦/余弦信号做平均, 交叉项计算得到:

$$\frac{1}{T} \int_0^T w(u(t), y(t)) dt = \frac{1}{2} k^* M(j\omega_0) k.$$

因为积分非负, 周期  $T > 0$ , 所以:

$$k^* M(j\omega_0) k \geq 0.$$

又  $k$  任意, 因此:

$$M(j\omega_0) \geq 0.$$

**定理 25 的充分性。** 反过来, 假设:

$$M(j\omega) \geq 0$$

对所有  $\omega$  成立。Parseval 定理说, 对  $L_2$  信号:

$$\int_0^\infty f(t)^T g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(j\omega)^* G(j\omega) d\omega.$$

令:

$$f(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix},$$

$$g(t) = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}.$$

则时间域积分正是:

$$\int w(u(t), y(t)) dt.$$

频域中, 由  $Y = GU$ , 该积分变成:

$$\frac{1}{2\pi} \int U(j\omega)^* M(j\omega) U(j\omega) d\omega.$$

若  $M(j\omega) \geq 0$ , 每个频率上的 integrand 非负, 所以积分非负。为了对应 cyclodissipativeness, 选择  $x(0) = 0$ ,  $x(T) = 0$  的有限时间输入, 并把输入延拓为  $t > T$  后为零, 就能应用 Parseval。由此得到闭合状态轨迹上的非负供给积分。

**假设 2: 有意义的供给率。** 本章引入一个重要假设: 对任意  $y \neq 0$ , 存在某个  $u = k(y)$ , 使:

$$w(u, y) < 0.$$

为什么需要它? 如果:

$$w(u, y) \geq 0$$

对所有  $u, y$  都成立, 那么任何系统都自动 dissipative, 这个供给率没有区分能力。如果:

$$w(u, y) \leq 0$$

对所有  $u, y$  都成立, 那么几乎没有非平凡系统能 dissipative。假设 2 排除这两种无意义极端。因为  $w$  是二次型, 如果存在某个  $u$  使  $w(u, y) < 0$ , 则可取线性反馈形式:

$$u = -Ky.$$

代入:

$$w(-Ky, y) = y^T Qy + 2y^T S(-Ky) + (-Ky)^T R(-Ky).$$

逐项:

$$2y^T S(-Ky) = -2y^T SKy,$$

$$(-Ky)^T R(-Ky) = y^T K^T RKy.$$

所以:

$$w(-Ky, y) = y^T (Q - SK - K^T S^T + K^T RK)y.$$

要对所有  $y \neq 0$  负, 就是:

$$Q - SK - K^T S^T + K^T RK < 0.$$

这就是原文公式 (8)。

**引理 5:  $Q < 0$  时 cyclodissipativity 与 dissipativity 的差别是稳定性。** 引理 5 说: 若  $G$  observable, 且  $G$  是  $(Q, S, R)$ -cyclodissipative, 其中  $Q < 0$ , 则  $G$  是  $(Q, S, R)$ -dissipative 当且仅当状态空间实现渐近稳定。证明的核心是: cyclodissipativity 给出二次 virtual storage:

$$\phi(x) = x^T P x.$$

零输入时:

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} y^T Q y dt \geq \phi(x(t_1)).$$

若系统渐近稳定:

$$x(t_1) \rightarrow 0, \quad \phi(x(t_1)) \rightarrow 0.$$

令  $t_1 \rightarrow \infty$ 。因为  $Q < 0$ , 积分项非正, 所以仍可推出:

$$\phi(x(t_0)) \geq 0.$$

任意  $x(t_0)$  都成立, 因此  $\phi \geq 0$ , virtual storage 变成 storage function, 系统 dissipative。反过来, 如果系统 dissipative, storage function 可作为 Lyapunov-like function, 在  $Q < 0$  和 observability 下推出渐近稳定。

**定理 26:** 用静态输出反馈把一般  $Q$  化成  $Q_1 < 0$ 。定理设存在常矩阵  $K$ , 使:

$$I + DK$$

非奇异, 并且:

$$Q - SK - K^T S^T + K^T R K < 0.$$

那么在  $G$  已 cyclodissipative 的前提下:

$$G \text{ dissipative}$$

当且仅当反馈系统:

$$u = -Ky$$

渐近稳定。证明思路是引入新输入:

$$u = u_1 - Ky.$$

把供给率写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}.$$

代入:

$$u = u_1 - Ky.$$

矩阵变换:

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

于是供给矩阵变成:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & S_1 \\ S_1^T & R \end{bmatrix},$$

其中:

$$Q_1 = Q - SK - K^T S^T + K^T R K,$$

$$S_1 = S - K^T R.$$

按假设  $Q_1 < 0$ , 所以引理 5 可用于新系统  $G_1: u_1 \mapsto y$ 。因此 dissipativity 等价于反馈闭环渐近稳定。这个定理很强: 只要  $K$  满足负定不等式, 所有这样的  $K$  要么都稳定化, 要么都不稳定化; 不需要在这些  $K$  中再搜索“最好的”。

**引理 6 与定理 27: 右半平面频域条件。** 引理 6 针对  $Q < 0$ :

$$G \text{ dissipative} \iff M(s) \geq 0$$

对所有:

$$\operatorname{Re} s \geq 0$$

成立。直觉:

- 若  $M(s) \geq 0$  在右半平面成立, 则  $G$  不能有右半平面极点, 因为靠近极点时  $G^*QG$  会因  $Q < 0$  导致负无穷方向。
- 于是  $G$  稳定。
- 边界  $M(j\omega) \geq 0$  给出 cyclodissipativity。
- 引理 5 把 cyclodissipativity 加稳定性变成 dissipativity。

定理 27 把它推广到一般  $Q$ , 但需要存在  $K$  使:

$$Q - SK - K^T S^T + K^T R K < 0.$$

结论:

$$G \text{ dissipative} \iff M(s) \geq 0$$

对所有  $\operatorname{Re} s \geq 0$  且  $s$  不是  $G$  极点的点成立。证明用定理 26 中的反馈变换。令：

$$G_1(s) = G(s)[I + KG(s)]^{-1}.$$

对应：

$$M_1(s) = R + S_1^T G_1 + G_1^* S_1 + G_1^* Q_1 G_1.$$

直接展开可得：

$$[I + KG(s)]^* M_1(s) [I + KG(s)] = M(s).$$

因为左、右乘可逆矩阵不改变半正定性，所以  $M_1 \geq 0$  等价于  $M \geq 0$ ，避开极点即可。

**处理无穷远极点和虚轴极点。** 原文提醒：若  $G(s)$  有无穷远极点，严格状态空间形式未覆盖。这时可像 Nyquist 判据一样用 D-shaped contour：

- 沿  $s = j\omega$ ,  $\omega \in [-k, k]$ 。
- 再沿右半平面的半圆闭合。
- 令  $k \rightarrow \infty$ 。

若虚轴上有极点，则绕过每个虚轴极点，用右半平面小半圆，半径  $\epsilon \rightarrow 0$ 。这些技术细节在需要数绕数的图形判据中尤其重要。

### 6.2.3 标量系统的图形检验

本节处理 SISO 系统。因为  $G(s), Q, S, R$  都是标量，所以  $M(j\omega) \geq 0$  可以直接变成复平面中的圆或直线条件。

**标量频域不等式。** 标量情况下：

$$M(j\omega) = R + SG(j\omega) + G(j\omega)^* S + G(j\omega)^* QG(j\omega).$$

因为  $S$  是实数：

$$SG + G^* S = 2S \operatorname{Re} G.$$

所以：

$$M = Q|G|^2 + 2S \operatorname{Re} G + R.$$

令：

$$G(j\omega) = x + jy,$$

其中：

$$x = \operatorname{Re} G(j\omega), \quad y = \operatorname{Im} G(j\omega).$$

则：

$$|G|^2 = x^2 + y^2.$$

不等式为：

$$Q(x^2 + y^2) + 2Sx + R \geq 0.$$

$Q \neq 0$  时配方。若  $Q \neq 0$ ，把  $x$  配方：

$$Qx^2 + 2Sx = Q \left( x^2 + 2\frac{S}{Q}x \right).$$

括号内：

$$x^2 + 2\frac{S}{Q}x = \left( x + \frac{S}{Q} \right)^2 - \left( \frac{S}{Q} \right)^2.$$

所以：

$$Q(x^2 + y^2) + 2Sx + R = Q \left[ \left( x + \frac{S}{Q} \right)^2 + y^2 \right] - \frac{S^2}{Q} + R.$$

要求非负：

$$Q \left[ \left( x + \frac{S}{Q} \right)^2 + y^2 \right] \geq \frac{S^2}{Q} - R.$$

右侧合并：

$$\frac{S^2}{Q} - R = \frac{S^2 - QR}{Q}.$$

若  $Q > 0$ ，两边除以  $Q$  不变号：

$$\left( x + \frac{S}{Q} \right)^2 + y^2 \geq \frac{S^2 - QR}{Q^2}.$$

这是圆外部条件。圆心：

$$\left( -\frac{S}{Q}, 0 \right),$$

半径：

$$\frac{\sqrt{S^2 - QR}}{|Q|}.$$

若  $Q < 0$ , 除以  $Q$  会反向, 得到圆内部条件:

$$\left(x + \frac{S}{Q}\right)^2 + y^2 \leq \frac{S^2 - QR}{Q^2}.$$

$Q = 0$  时直线条件。若  $Q = 0$ , 不等式变成:

$$2Sx + R \geq 0.$$

若  $S > 0$ :

$$x \geq -\frac{R}{2S}.$$

图形在竖直线:

$$\operatorname{Re} G = -\frac{R}{2S}$$

右侧。若  $S < 0$ , 不等号反向:

$$x \leq -\frac{R}{2S}.$$

图形在该线左侧。若  $Q = S = 0$ , 条件只剩  $R \geq 0$ , 与系统无关, 通常不感兴趣。

**定理 28: 标量 cyclodissipativity 圆判据。** SISO 系统  $(Q, S, R)$ -cyclodissipative 的充要条件:

1.  $Q > 0$ : Nyquist 图  $G(j\omega)$  位于圆外。
2.  $Q < 0$ : Nyquist 图  $G(j\omega)$  位于圆内。
3.  $Q = 0$ : Nyquist 图位于某条竖直线一侧。

圆心和半径如上。这里要求:

$$S^2 - QR > 0.$$

这正是标量情况下 “interesting triples” 的条件。若它不成立, 圆半径无意义, 判据要么空泛, 要么不可能满足。

**定理 29: 标量 dissipativity。** cyclodissipativeness 只检查图形位置。dissipativeness 还需要极点/绕数条件。当:

$$S^2 - QR > 0,$$

SISO 系统  $(Q, S, R)$ -dissipative 的充要条件是：满足定理 28 的图形条件，并且：

1. 若  $Q > 0$ ,  $G(j\omega)$  对 critical disc 的逆时针绕数等于  $G(s)$  在闭右半平面的极点数。
2. 若  $Q < 0$ ,  $G(s)$  在闭右半平面无极点。
3. 若  $Q = 0$ ,  $G(s)$  在开右半平面无极点，虚轴上至多有简单极点；若  $j\omega_0$  是虚轴极点，则残数满足相应正性条件：

$$S \lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s - j\omega_0)G(s) > 0.$$

为什么三种情况不同。定理 29 来自定理 26：

- $Q > 0$  时选  $K = Q/S$ , 反馈稳定性变成 Nyquist 绕 critical disc 的条件。
- $Q < 0$  时可选  $K = 0$ , 所以只需原系统本身无闭右半平面极点。
- $Q = 0$  时选小扰动  $K = \epsilon/S$ , 再令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 得到虚轴简单极点和残数条件。

**finite gain 的特例。** finite gain 对应：

$$(Q, S, R) = (-1, 0, k^2).$$

定理 28 的  $Q < 0$  圆内部条件变成：

$$|G(j\omega)| \leq k.$$

定理 29 还要求：

$$G(s)$$

没有闭右半平面极点。于是线性系统的  $L_2$  增益就是：

$$\sup_{\omega} |G(j\omega)|.$$

#### 6.2.4 多变量系统的图形检验

本节把标量圆判据推广到 MIMO 系统。困难在于： $G(j\omega)$  是矩阵，不再能简单画一条复平面曲线。作者给出三类方法：

1. 特殊矩阵情形：normal matrix 和  $qI, tI, rI$  参数。
2. 奇异值/特征值判据。
3. Nyquist bands 与 M-matrix 条件，给出图形化充分条件。

**Hermitian 与 singular values.** 对 MIMO 系统:

$$M(j\omega) = R + S^T G + G^* S + G^* Q G.$$

因为  $M(j\omega)$  是 Hermitian, 它的特征值都是实数, 可以用:

$$M(j\omega) \geq 0$$

等价于所有特征值非负。但若考虑非 Hermitian 矩阵本身, 比如  $G(j\omega)$ , 不能用特征值表达大小, 而要用奇异值。矩阵  $A$  的奇异值是:

$$(A^* A)^{1/2}$$

的特征值。

**定理 30: normal  $G(s)$ .** 若:

$$G(s) = V(s)\Lambda(s)V(s)^*$$

其中:

$$\Lambda(s) = \text{diag}(\lambda_1(s), \dots, \lambda_m(s)),$$

且  $V^{-1} = V^*$ , 则  $G$  是 normal。设:

$$Q = qI, \quad S = tI, \quad R = rI.$$

则:

$$M = G^* qIG + G^* tI + tIG + rI.$$

代入  $G = V\Lambda V^*$ :

$$G^* = V\Lambda^* V^*.$$

于是:

$$M = V (q\Lambda^* \Lambda + t\Lambda^* + t\Lambda + rI) V^*.$$

因为  $V$  酉相似不改变半正定性, 所以  $M \geq 0$  当且仅当每个对角元素:

$$q|\lambda_i|^2 + 2t \text{Re } \lambda_i + r \geq 0.$$

这正是标量判据。因此定理 30 说: normal 情况下, 只需对每个特征值  $\lambda_i(j\omega)$  应用定理 28/29。

**定理 31: 一般  $G$  的奇异值判据。** 仍设:

$$Q = qI, \quad S = tI, \quad R = rI,$$

并且:

$$t^2 > qr.$$

若  $q > 0$ , 圆外条件变成最小奇异值条件:

$$\sigma_{\min} \left( G(j\omega) + \frac{t}{q}I \right) \geq \frac{1}{q} \sqrt{t^2 - qr}.$$

为什么是最小奇异值? 因为  $q > 0$  时要求矩阵  $G + t/qI$  的所有方向都在球外, 最危险方向是最小放大方向。若  $q < 0$ , 圆内条件变成最大奇异值条件:

$$\sigma_{\max} \left( G(j\omega) + \frac{t}{q}I \right) \leq \frac{1}{|q|} \sqrt{t^2 - qr}.$$

若  $q = 0$ , 条件变成 Hermitian 部分:

$$t\lambda_{\min}(G(j\omega) + G(j\omega)^*) \geq -r.$$

dissipativeness 还要加极点条件。例如  $q < 0$  时要求  $G(s)$  无闭右半平面极点;  $q = 0$  时要求无开右半平面极点、虚轴极点简单并满足残数矩阵半正定。

**定理 32: 输出线性变换。** 对任意实矩阵  $A$ , 系统  $AG(s)$  是  $(Q, S, R)$ -dissipative, 当且仅当  $G(s)$  是:

$$(A^TQA, A^TS, R)$$

dissipative。证明很直接。新输出:

$$\tilde{y} = Ay.$$

供给率:

$$\tilde{y}^T Q \tilde{y} + 2\tilde{y}^T S u + u^T R u = y^T A^T Q A y + 2y^T A^T S u + u^T R u.$$

所以参数变换如上。

**定理 33: 系统求逆。** 若  $G$  可逆, 则:

$$G \text{ 是 } (Q, S, R) \text{ dissipative}$$

当且仅当:

$G^{-1}$  是  $(R, S^T, Q)$  dissipative.

直观上, 求逆交换输入和输出:

$$y = Gu \iff u = G^{-1}y.$$

供给率:

$$y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u$$

把  $y$  当作新输入、 $u$  当作新输出, 参数自然交换为:

$$(R, S^T, Q).$$

这个结果有实际用处: 有些  $G$  不对角占优, 但  $G^{-1}$  可能对角占优, 后续图形判据可用于  $G^{-1}$ .

**引理 7: 对角加权小增益矩阵条件.** 引理 7 给出一个矩阵范数型条件. 若复矩阵  $Z$  满足对某些正数  $a_i > 0$ :

$$\sum_j \frac{a_j}{a_i} |Z_{ij}| \leq 1 \quad \text{for all } i,$$

且:

$$\sum_i \frac{a_i}{a_j} |Z_{ij}| \leq 1 \quad \text{for all } j,$$

则:

$$I - Z^* Z \geq 0.$$

含义: 在合适的对角缩放下,  $Z$  是非扩张映射, 即:

$$\|Zx\| \leq \|x\|.$$

证明用 Cauchy-Schwarz 不等式, 对每个分量:

$$|(Zx)_i|^2 \leq \left( \sum_j \frac{a_j}{a_i} |Z_{ij}| \right) \left( \sum_j \frac{a_i}{a_j} |Z_{ij}| |x_j|^2 \right).$$

第一括号  $\leq 1$ , 再对  $i$  求和并用第二个条件, 得到:

$$\|Zx\|^2 \leq \|x\|^2.$$

所以  $I - Z^* Z \geq 0$ .

**引理 8: 对角占优推出 Hermitian 正性。** 引理 8 处理  $Z + Z^* - 2I \geq 0$ 。条件大意是: 每个实对角元  $Z_{ii}$  足够大, 能压过非对角项。令:

$$Y = \frac{1}{2}(Z + Z^*) - I.$$

要证:

$$Y \geq 0.$$

证明把:

$$x^* Y x$$

下界成若干平方和:

$$\sum_{i < j} a_i a_j |Y_{ij}| (u_i - u_j)^2 \geq 0,$$

其中:

$$u_i = \frac{|x_i|}{a_i}.$$

这本质上是 Gershgorin/对角占优思想的 Hermitian 版本。

**Nyquist band 的定义。** 对传递矩阵  $G(s) = [g_{ij}(s)]$ , 第  $i$  个 Nyquist band 是以对角元素:

$$g_{ii}(j\omega)$$

为中心, 半径  $\delta_i(\omega)$  的圆在  $\omega$  扫描时扫出的带状区域。如果非对角元素很小, 则 band 很窄, 近似就是对角元素的 Nyquist 曲线。非对角元素越大, band 越宽, 表示通道耦合带来的不确定性。

**定理 34: bands 在圆内。** 若第  $i$  个 band 半径为:

$$\max \left( \sum_{j \neq i} |g_{ij}(j\omega)|, \sum_{j \neq i} |g_{ji}(j\omega)| \right)$$

且它位于圆心  $(c_i, 0)$ 、半径  $\rho_i$  的圆内。定义:

$$P = \text{diag}(\rho_i), \quad C = \text{diag}(c_i).$$

则  $G$  是:

$$(-P^{-1}, P^{-1}C, P - C^2 P^{-1})$$

cyclodissipative。若  $G$  无闭右半平面极点，则 dissipative。这是多变量版“圆内”判据，对应标量  $Q < 0$ 。

**定理 35: bands 在圆外。** 若第  $i$  个 band 半径为：

$$\frac{1}{2} \sum_{j \neq i} (|g_{ij}| + |g_{ji}|)$$

且位于圆心  $(c_i, 0)$ 、半径  $\rho_i$  的圆外，则：

$$G$$

是：

$$(P^{-1}, -P^{-1}C, C^2P^{-1} - P)$$

cyclodissipative。dissipativeness 还需加绕数条件：bands 对 critical circles 的净逆时针绕数之和等于  $G(s)$  在闭右半平面的极点数。这是多变量版“圆外”判据，对应标量  $Q > 0$ 。

**定理 36: 直线半平面判据。** 令：

$$S = \text{diag}(\sigma_i), \quad \sigma_i = \pm 1.$$

若第  $i$  个 Nyquist band 位于竖直线：

$$\text{Re } s = b_i$$

的右侧或左侧，方向由  $\sigma_i$  决定，则  $G$  是：

$$(0, S, -2BS)$$

cyclodissipative，其中：

$$B = \text{diag}(b_i).$$

这对应标量  $Q = 0$  的直线判据。

**定理 s 37-39: M-matrix 型图形条件。** 定理 s 37-39 采用另一种思想：先给每个元素  $g_{ij}$  单独画圆界：

$$|g_{ij}(j\omega) - c_{ij}| \leq b_{ij}.$$

然后用 M-matrix 条件组合这些界。定理 37 对应所有元素都在圆内，得到：

$$G \text{ is } (-D, DC, DK^2 - C^T DC) \text{ cyclodissipative.}$$

其中  $K, D$  是正定对角矩阵, 满足:

$$K - B \text{ is an M-matrix,}$$

以及:

$$B^T D B \leq D K^2.$$

证明的核心是由圆界得到:

$$\|y - Cu\|_D^2 \leq \|Ku\|_D^2,$$

也就是有限增益型不等式。定理 38 对应对角元素在圆外、非对角元素在圆内, 得到:

$$(D, -DC, C^T DC - DK^2)$$

型 cyclodissipativity, 并加相应绕数条件得到 dissipativity。定理 39 对应对角元素已知为  $(0, t_i, r_i)$ -dissipative, 而非对角元素有圆界。通过 M-matrix:

$$m_{ii} = k_i - r_i, \quad m_{ij} = -|t_i| b_{ij},$$

得到整体:

$$(0, DT, DK - TDC - C^T DT)$$

cyclodissipativity。

**定理 40: Rosenbrock 多变量圆判据。** 定理 40 是历史上重要的多变量 circle criterion 的 dissipativity 表述。它使用对角矩阵:

$$\Theta = \text{diag}(\theta_i), \quad \sum_i \theta_i^{-2} \leq 1,$$

以及:

$$Z = \text{diag}(\zeta_i), \quad H = \text{diag}(\eta_i).$$

条件要求对 Nyquist 图满足类似:

$$|\zeta_i + g_{ii}| - \sum_{j \neq i} |g_{ij}| > \theta_i \eta_i$$

或列版本。结论是:

$$G \text{ is } (D^2, D^2 Z, D^2(Z^2 - H^2))$$

cyclodissipative, 并在通常绕数条件下 dissipative。证明依赖 Rosenbrock 的正实变换和 Araki 的技术。作者也指出, 类似  $Q < 0$  或  $Q = 0$  的对应版本尚无已知证明。

MIMO 图形判据没有 SISO 那样干净。必要充分条件通常要用奇异值/特征值; 更直观的 Nyquist band 判据多是充分条件, 常依赖对角占优或 M-matrix。实际使用时, 通常需要尝试多种判据, 比较保守性。

### 6.2.5 使用乘子的结果

本节介绍 multiplier 方法: 在系统中插入一个线性动态  $Z(s)$  及其逆  $Z(s)^{-1}$ , 不改变原系统闭环传递关系, 却改变可用于分析的子系统 dissipativity 条件。

**multiplier 的工程直觉。** 图 1 是原始反馈系统, 图 2 是插入 multiplier 后的增强系统。若在一个位置插入  $Z$ , 必须在对应位置插入  $Z^{-1}$ , 使整体环路增益不变。这样做的目的不是改变真实系统, 而是改变分析分解方式:

- 原来需要分析  $G$  和  $N$ 。
- 现在分析  $ZG$  和  $NZ^{-1}$ 。

如果  $ZG$  的频域图形更容易满足圆判据, 同时  $NZ^{-1}$  仍可证明 dissipative, 则能得到比  $Z = I$  更弱保守的稳定条件。

**Popov plot。** 本节主要是标量  $G(s)$ 。定义:

$$F(s) = Z(s)G(s).$$

令:

$$F_r = \operatorname{Re} F(j\omega), \quad F_i = \operatorname{Im} F(j\omega),$$

$$G_r = \operatorname{Re} G(j\omega), \quad G_i = \operatorname{Im} G(j\omega).$$

标量频域矩阵:

$$M(j\omega) = R + 2SF_r + Q(F_r^2 + F_i^2).$$

Nyquist plot 使用坐标:

$$(G_r, G_i).$$

Popov plot 使用坐标:

$$(G_r, \omega G_i).$$

后者把频率权重放进纵轴, 特别适合  $Z(s) = 1 + \alpha s$  这类 multiplier。

**最简单 multiplier:**  $Z(s) = s$ 。若:

$$F = sG.$$

在  $s = j\omega$  上:

$$F(j\omega) = j\omega(G_r + jG_i) = j\omega G_r - \omega G_i.$$

所以:

$$F_r = -\omega G_i, \quad F_i = \omega G_r.$$

代入:

$$M(j\omega) = R - 2S\omega G_i + \omega^2 Q(G_r^2 + G_i^2).$$

若  $Q = 0$ , 则:

$$R - 2S\omega G_i \geq 0.$$

若  $S > 0$ :

$$\omega G_i \leq \frac{R}{2S}.$$

若  $S < 0$ , 方向相反。也就是说 Popov plot 要位于某条水平线的一侧。

$Z(s) = 1 + \alpha s$ 。令:

$$Z(s) = 1 + \alpha s.$$

在  $s = j\omega$  上:

$$Z(j\omega) = 1 + j\alpha\omega.$$

于是:

$$F = (1 + j\alpha\omega)(G_r + jG_i).$$

展开:

$$F = G_r + jG_i + j\alpha\omega G_r + j^2\alpha\omega G_i.$$

因为  $j^2 = -1$ :

$$F = (G_r - \alpha\omega G_i) + j(G_i + \alpha\omega G_r).$$

所以:

$$F_r = G_r - \alpha\omega G_i,$$

$$F_i = G_i + \alpha\omega G_r.$$

代入:

$$M = R + 2S(G_r - \alpha\omega G_i) + Q(G_r^2 + G_i^2 + \alpha^2\omega^2 G_r^2 + \alpha^2\omega^2 G_i^2).$$

**定理 41: Popov criterion.** 若  $Q = 0$ , 则:

$$M = R + 2S(G_r - \alpha\omega G_i).$$

令 Popov 坐标:

$$x = G_r, \quad y = \omega G_i.$$

条件:

$$R + 2S(x - \alpha y) \geq 0.$$

若  $S > 0$ :

$$x - \alpha y \geq -\frac{R}{2S}.$$

边界直线:

$$x - \alpha y = -\frac{R}{2S}.$$

写成:

$$y = \frac{1}{\alpha}x + \frac{R}{2\alpha S}.$$

斜率为:

$$\frac{1}{\alpha},$$

并通过点:

$$\left(-\frac{R}{2S}, 0\right).$$

定理 41 正是说: Popov plot 在这条线的右侧或左侧, 就有  $ZG$  的  $(0, S, R)$ -cyclo-dissipativity。

**定理 42:**  $Q > 0$  时的椭圆和直线界。当  $Q > 0$ , 令:

$$p_1, p_2: \quad x = -\frac{S}{Q} \pm \frac{\sqrt{S^2 - QR}}{Q}.$$

这是标准圆判据与实轴的两个交点。定理 42 给出两个充分条件:

1. Popov plot 位于某个椭圆外。
2. Popov plot 位于两条平行直线外。

椭圆边界为:

$$\left(x + \frac{S}{Q}\right)^2 + \alpha^2 \left(y - \frac{S}{\alpha Q}\right)^2 = \frac{2S^2 - RQ}{Q^2}.$$

其中:

$$x = \operatorname{Re} G(j\omega), \quad y = \omega \operatorname{Im} G(j\omega).$$

证明关键是下界:

$$M(j\omega) \geq R + 2S(x - \alpha y) + Q(x^2 + \alpha^2 y^2),$$

右边为椭圆外非负条件。另一个下界:

$$M(j\omega) \geq R + 2S(x - \alpha y) + Q(x - \alpha y)^2.$$

这只依赖  $x - \alpha y$ , 所以边界是两条平行直线。

**替代 multiplier 结构:**  $(1 + \alpha s)G/(1 + hG)$ 。原文还讨论把一个常数反馈  $h$  放进结构中, 得到线性块:

$$\frac{(1 + \alpha s)G(s)}{1 + hG(s)}.$$

若没有  $Z$ , 则:

$$\frac{G}{1 + hG}$$

是  $(Q, S, R)$ -dissipative 当且仅当  $G$  是:

$$(Q + 2hS + h^2R, S + hR, R)$$

dissipative。但当前结构不同, 因为  $Z$  不在分母中, 所以确实产生新条件。

**定理 43: 抛物线界。** 若:

$$h(2S + hR) \geq 0,$$

则:

$$\frac{(1 + \alpha s)G(s)}{1 + hG(s)}$$

是  $(0, S, R)$ -cyclo-dissipative, 如果 Popov plot 满足:

$$2\alpha S y \leq (1 + hx)(R + (2S + hR)x).$$

其中:

$$x = G_r, \quad y = \omega G_i.$$

边界是一条抛物线。根据  $\alpha S$  的符号, 图形要在抛物线上方或下方。证明把  $M$  乘以正量:

$$|1 + hG(j\omega)|^2$$

得到:

$$|1 + hG|^2 M = h(2S + hR)G_i^2 + (1 + hx)(R + (2S + hR)x) - 2\alpha S y.$$

第一项由假设非负, 剩余项由图形条件保证非负。

**定理 44: 一般  $Q$  的椭圆/抛物线界。** 定义:

$$Q_1 = Q + 2hS + h^2R,$$

$$S_1 = S + hR.$$

若:

$$Q \geq 0, \quad Q_1 \geq 0,$$

则系统  $(1 + \alpha s)G/(1 + hG)$  是  $(Q, S, R)$ -cyclo-dissipative, 如果:

$$Q_1 x^2 + 2S_1 x + \alpha^2 Q y^2 - 2\alpha S y + R \geq 0.$$

这条边界随  $Q, Q_1$  的符号退化为椭圆、抛物线或直线。

**定理 45: 更复杂 multiplier.** 考虑:

$$G_1(s) = \frac{1 + \alpha s}{1 + \beta s} \frac{G(s)}{1 + hG(s)}.$$

定义:

$$Q_1 = Q + 2hS + h^2R,$$

$$S_1 = S + hR,$$

$$Q_2 = \alpha^2Q + 2\alpha\beta hS + \beta^2h^2R.$$

若  $Q_1 \geq 0$ , 且 Popov plot 满足两个不等式:

$$Q_2x^2 + 2\beta(\alpha S + \beta hR)x + \beta^2R \geq 0,$$

$$Q_1x^2 + Q_2y^2 + 2S_1x - 2S(\alpha - \beta)y + R \geq 0,$$

则  $G_1$  是  $(Q, S, R)$ -cyclo-dissipative. 第一个不等式通常给出一对竖直线或单线; 第二个不等式给出一个二次曲线区域. 复杂 multiplier 带来更复杂图形条件, 所以作者认为继续推广未必划算.

**RL 和 RC multipliers.** 定义 19:  $Z(s)$  属于 RL 类, 如果:

$$Z(s) = \prod_{n=0}^N \frac{s - \alpha_n}{s - \beta_n},$$

且:

$$0 < \alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots$$

定义 20:  $Z(s)$  属于 RC 类, 如果:

$$Z(s)^{-1}$$

属于 RL 类. 这些定义对应 RL/RC 电路中极点零点沿负实轴交替的结构. 原文排除原点和无穷远处的极点/零点.

**引理 9: RL/RC multiplier 可近似给定相位。** 对任意:

$$0 < a < b < \infty, \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \epsilon > 0,$$

存在 RL 或 RC 函数, 使:

$$|\text{phase } Z(j\omega) - \theta| < \epsilon$$

对所有:

$$\omega \in [a, b]$$

成立。这说明 RL/RC multiplier 可以在有限频带内提供几乎常数相位补偿。

**引理 10 与 off-axis circle criteria。** 若 Nyquist plot 位于过原点的一条直线的一侧, 并且不碰到该线, 则存在 RL 或 RC multiplier  $Z$ , 使:

$$ZG$$

是  $(0, S, 0)$ -cyclo-dissipative。直觉: 直线一侧条件等价于  $SG(j\omega)$  的相位落在某个长度小于  $\pi$  的区间。选择  $Z$  给它补一个相位  $\theta$ , 就能把相位移入:

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

也就是正实条件。这可推出 off-axis circle criteria: 如果 Nyquist plot 在一个不必以实轴为中心的圆内, 而该圆与实轴交于:

$$\left(-\frac{1}{K_2}, 0\right), \quad \left(-\frac{1}{K_1}, 0\right),$$

则双线性变换:

$$\frac{1 + K_2 G(j\omega)}{1 + K_1 G(j\omega)}$$

把这个圆映射到直线条件, 从而应用引理 10。multiplier 方法的本质是通过  $Z(s)$  改变频域图形, 使原本不能通过圆判据的系统通过 Popov/椭圆/抛物线等判据。代价是: 还必须在下一章证明  $NZ^{-1}$  等非线性部分也满足相应 dissipativity。

## 6.2.6 离散时间系统

本节说明第 8 章大部分频域结果如何迁移到离散时间系统。

离散时间线性系统。系统：

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k,$$

$$y_k = Cx_k + Du_k.$$

使用  $l_2$  信号空间，而不是连续时间的  $L_2$ 。传递函数用  $z$ -transform：

$$G(z) = D + C(zI - A)^{-1}B.$$

连续时间中的稳定区域是左半平面；不稳定区域是：

$$\operatorname{Re} s \geq 0.$$

离散时间中稳定极点在单位圆内，不稳定区域是：

$$|z| \geq 1.$$

因此替换规则是：

$$\operatorname{Re} s \geq 0 \quad \longrightarrow \quad |z| \geq 1.$$

$$s = j\omega \quad \longrightarrow \quad z = e^{j\theta}.$$

Nyquist plot 从：

$$G(j\omega)$$

变成：

$$G(e^{j\theta}), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

**multiplier 的差异。** 本章前半部分的判据几乎照搬。但 multiplier 在离散时间中差异更大。定理 46 给出一个简单例子：

$$G_1(z) = (1 + \alpha z)G(z).$$

若图形：

$$y = \operatorname{Re}(e^{j\theta}G(e^{j\theta}))$$

对：

$$x = \operatorname{Re}G(e^{j\theta})$$

满足:

$$R + 2Sx + 2\alpha Sy \geq 0,$$

则  $G_1$  是  $(0, S, R)$ -dissipative。

**定理 46 的计算。** 令:

$$G(e^{j\theta}) = G_r + jG_i.$$

则:

$$e^{j\theta}G(e^{j\theta}) = (\cos\theta + j\sin\theta)(G_r + jG_i).$$

展开:

$$= G_r \cos\theta - G_i \sin\theta + j(G_i \cos\theta + G_r \sin\theta).$$

所以:

$$\operatorname{Re}(e^{j\theta}G(e^{j\theta})) = G_r \cos\theta - G_i \sin\theta.$$

定义:

$$x = G_r, \quad y = G_r \cos\theta - G_i \sin\theta.$$

对  $Q = 0$ :

$$M = R + 2S \operatorname{Re} G_1.$$

而:

$$G_1 = (1 + \alpha z)G = G + \alpha zG.$$

所以:

$$\operatorname{Re} G_1 = x + \alpha y.$$

因此:

$$M = R + 2Sx + 2\alpha Sy.$$

这就是定理条件。离散时间中，频域边界从虚轴变成单位圆。普通圆判据迁移较顺利，但 multiplier 理论不像连续时间那样成熟。作者明确说，离散时间 multiplier 如何系统地转化为稳定判据仍然是开放问题。

### 6.2.7 注释与文献线索

本节把第 8 章结果放入历史背景。

**历史脉络。** Popov 的图形判据对应本章定理 41。它最早来自 Popov 的工作。标量 circle criterion 对应定理 29, 历史上与 Sandberg 和 Zames 的工作相关。Sandberg 和 Zames 的框架可处理更一般系统, 但真正图形化、易画图的形式主要在标量情形。

定理 s 42-45 受 Bergen 和 Shapiro 的 parabola criterion 启发。off-axis circle criterion 来自 Cho 和 Narendra。Rosenbrock 给出了早期多变量 circle criterion, 对应定理 40。Cook 的结果与定理 35 接近。定理 s 37-39 来自 Araki。

**频域与时域不等式的关系。** 特殊情形:

$$(0, I, 0)$$

passivity, 以及:

$$(-I, 0, I)$$

finite-gain/bounded-real 类型条件, 早在线性无源网络和控制理论中就已知。但把一般  $(Q, S, R)$  dissipativity 与频域  $M(s) \geq 0$  系统对应起来, 需要更细致的处理。Moylan 指出, 这与 Willems 的 optimal control/dissipativity 结果相关。假设 2 或公式:

$$Q - SK - K^T S^T + K^T R K < 0$$

来自 Moylan 基于 Willems 结果的工作。若没有这个“interesting supply rate”假设, 频域条件会复杂得多, 定理 27 这种简单对应可能失败。第 8 章的主线可以压缩为:

1. 频域矩阵

$$M(s) = R + S^T G(s) + G(s)^* S + G(s)^* Q G(s)$$

是线性系统 dissipativity 的核心对象。

2.  $M(j\omega) \geq 0$  对应 cyclodissipativity。
3.  $M(s) \geq 0$  在右半平面对应 dissipativity, 但需要极点/稳定性/interesting supply rate 条件。
4. SISO 情况下条件变成圆、直线、Popov 线、椭圆、抛物线。
5. MIMO 情况下需要奇异值、Nyquist bands、对角占优或 M-matrix。
6. multiplier 是降低保守性的强工具, 但会把负担转移到非线性部分的 dissipativity 检查; 这正是第 9 章要做的事情。

## 第七章 非线性系统与扩展结果

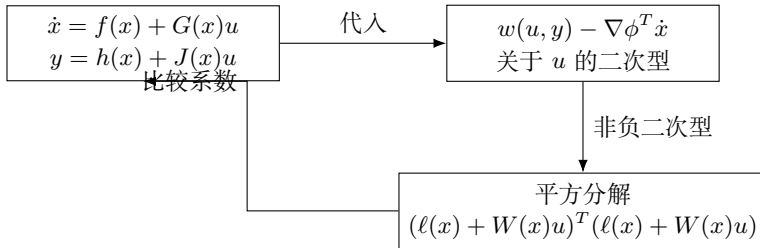


图 7.1 非线性输入仿射系统中的平方分解与代数条件。

前几章给出一般理论，本章讨论两类更具体也更便于计算的结果：一类是一阶或简单非线性系统，可以把矩阵条件化成显式区间判据；另一类是松弛稳定、连接稳定、最优控制、耗散延迟和结构分解等扩展结果。这些内容说明耗散理论不是单一判据，而是一种把能量、互联和优化放在同一个框架下的语言。

### 7.1 简单非线性系统的显式判据

#### 7.1.1 引言

第 9 章接着第 8 章的 multiplier 思路，研究一类简单非线性系统的 dissipativity 条件。特别是：一个一阶线性动态加一个 memoryless nonlinearity 的组合，什么时候满足给定的  $(Q, S, R)$  dissipativity? 经典 Popov 条件的场景是：

- 正向通道是线性系统。
- 反馈通道是无记忆非线性。

第 8 章说明，可以插入 multiplier  $Z(s)$  和  $Z(s)^{-1}$  改善线性部分的频域判据。但插入  $Z^{-1}$  后，非线性部分不再只是单纯 memoryless nonlinearity，而会和一个一阶线性动态结合。因此第 9 章要分析：

memoryless nonlinearity + first-order dynamics

的 dissipativity。

**本章研究的系统。** 原文考虑一阶标量状态系统：

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u,$$

$$y = h(x) + J(x)u.$$

其中：

- $x \in \mathbb{R}$ ：标量状态。
- $u \in \mathbb{R}$ ：标量输入。
- $y \in \mathbb{R}$ ：标量输出。
- $f(x)$ ：自由动态。
- $G(x)$ ：输入进入状态方程的增益。
- $h(x)$ ：状态到输出的非线性读出。
- $J(x)$ ：输入到输出的直接通道。

这是第 5 章输入仿射系统：

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad y = h(x) + J(x)u$$

在一维状态、一输入一输出时的特例。

**为什么假设  $G(x) \neq 0$ 。** 如果：

$$G(x) = 0,$$

则在该状态点输入  $u$  无法影响状态速度  $\dot{x}$ 。这意味着控制作用在该点丢失，很多公式会出现除以  $G(x)$  的项，也会导致结果陈述非常复杂。原文因此采用 standing assumption：

$$G(x) \neq 0 \quad \text{for all } x.$$

这不是说  $G(x) = 0$  情况不能分析，而是本章为了保持结果简洁先排除它。

**本章策略。** 和第 8 章一样，先求 cyclodissipativeness 条件，再问 virtual storage function 是否非负，从而得到 dissipativity。原因是：

- cyclodissipativeness 只需要存在 virtual storage function。
- dissipativity 还要求 storage function 非负。

第 9 章的主要难点就在第二步：怎样判断积分得到的  $\phi(x)$  是否对所有  $x$  非负。

### 7.1.2 9.2 重要的 $(Q, S, R)$ 三元组

本节在标量情形下精确刻画什么样的  $(Q, S, R)$  三元组是“有意义的”。这和第 8 章的  $S^2 - QR > 0$  条件一致。

**把  $u, y$  当作独立变量。** 供给率为：

$$w(u, y) = Qy^2 + 2Syu + Ru^2.$$

这里  $Q, S, R$  都是实标量。为了判断这个供给率是否有区分能力，先暂时不管  $u, y$  是否来自某个系统，而把它们看成独立变量。若：

$$w(u, y) \geq 0$$

对所有  $u, y$  都成立，则任何系统都自动 dissipative。这种三元组太弱，没有信息。若：

$$w(u, y) < 0$$

对所有非零  $u, y$  都成立，则几乎没有系统能 dissipative。这种三元组太强，也不实用。有意义的情况是： $w$  对某些  $u, y$  为正，对另一些  $u, y$  为负。

**标量化为一元二次函数。** 若  $u \neq 0$ ，令：

$$z = \frac{y}{u}.$$

则：

$$y = zu.$$

代入供给率：

$$w(u, y) = Q(zu)^2 + 2S(zu)u + Ru^2.$$

逐项：

$$Q(zu)^2 = Qz^2u^2,$$

$$2S(zu)u = 2Szu^2.$$

所以：

$$w(u, y) = (Qz^2 + 2Sz + R)u^2.$$

因为：

$$u^2 \geq 0,$$

供给率能否变号取决于：

$$p(z) = Qz^2 + 2Sz + R.$$

**情形**  $Q = 0$ 。若  $Q = 0$ ，则：

$$p(z) = 2Sz + R.$$

这是一条直线。它能取正也能取负，当且仅当：

$$S \neq 0.$$

若  $S = 0$ ，则  $p(z) = R$  是常数，不能通过  $z$  改变符号。

**情形**  $Q \neq 0$ 。若  $Q \neq 0$ ，则  $p(z)$  是二次函数。它能取正也能取负，当且仅当它有两个不同实根。判别式为：

$$\Delta = (2S)^2 - 4QR.$$

整理：

$$\Delta = 4(S^2 - QR).$$

两个不同实根要求：

$$\Delta > 0.$$

因此：

$$S^2 - QR > 0.$$

**统一条件。** 当  $Q = 0$  时，条件  $S^2 - QR > 0$  变成：

$$S^2 > 0,$$

即：

$$S \neq 0.$$

所以标量情形统一为：

$$S^2 - QR > 0.$$

本章后面默认这个条件成立。

### 7.1.3 循环耗散性的通用条件

本节从第 5 章的代数条件出发, 针对标量一阶系统消去  $\ell(x)$  和  $W(x)$ , 得到一个关于:

$$z(x) = \frac{G(x)h(x)}{f(x)}$$

的区间判据。

从第 5 章方程开始。对系统:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u,$$

$$y = h(x) + J(x)u,$$

令 storage/virtual storage 的导数为:

$$m(x) = \frac{d\phi(x)}{dx}.$$

因为  $x$  是标量, 梯度  $\nabla\phi$  就是普通导数  $m(x)$ 。第 5 章的三条方程变成:

$$f(x)m(x) = Qh(x)^2 - \ell(x)^T \ell(x),$$

$$\frac{1}{2}G(x)m(x) = h(x)(QJ(x) + S) - \ell(x)^T W(x),$$

$$QJ(x)^2 + 2SJ(x) + R = W(x)^T W(x).$$

定义:

$$\hat{R}(x) = R + 2SJ(x) + QJ(x)^2.$$

第三条要求:

$$\hat{R}(x) = W(x)^T W(x) \geq 0.$$

所以必要条件是:

$$\hat{R}(x) \geq 0 \quad \text{for all } x.$$

消去  $\ell, W$ : 矩阵半正定条件。因为:

$$\ell^T \ell = Qh^2 - mf,$$

$$\ell^T W = (QJ + S)h - \frac{1}{2}Gm,$$

$$W^T W = \hat{R},$$

这些量可以看成是一个 Gram matrix:

$$\begin{bmatrix} \ell^T \ell & \ell^T W \\ W^T \ell & W^T W \end{bmatrix} \geq 0.$$

代入上面的表达式, 得到:

$$\begin{bmatrix} Qh^2 - mf & (QJ + S)h - \frac{1}{2}Gm \\ (QJ + S)h - \frac{1}{2}Gm & \hat{R} \end{bmatrix} \geq 0.$$

这是原文公式 (10)。它必须对每个  $x$  逐点成立。

一个关键恒等式。原文使用恒等式:

$$\hat{R}Q = (QJ + S)^2 - (S^2 - QR).$$

验证:

$$\hat{R}Q = Q(R + 2SJ + QJ^2)$$

$$= QR + 2QSJ + Q^2J^2.$$

另一方面:

$$(QJ + S)^2 - (S^2 - QR)$$

$$= Q^2J^2 + 2QSJ + S^2 - S^2 + QR$$

$$= Q^2J^2 + 2QSJ + QR.$$

两边相同。这个恒等式让后面的区间端点可以简化成只含:

$$QJ + S$$

和:

$$\sqrt{S^2 - QR}.$$

**情形 1:**  $\hat{R} = 0$ 。当:

$$\hat{R} = 0,$$

矩阵半正定要求右下角为零。对一个半正定矩阵, 如果某个对角元为零, 则同一行列的非对角元必须为零。因此:

$$(QJ + S)h - \frac{1}{2}Gm = 0.$$

解出:

$$\frac{1}{2}Gm = (QJ + S)h.$$

两边乘以  $2/G$ :

$$m = \frac{2(QJ + S)h}{G}.$$

还要满足左上角非负:

$$Qh^2 - mf \geq 0.$$

代入  $m$ :

$$Qh^2 - \frac{2(QJ + S)h}{G}f \geq 0.$$

也就是:

$$Qh^2 \geq \frac{2(QJ + S)hf}{G}.$$

定义:

$$z = \frac{Gh}{f}.$$

把不等式两边乘以  $G^2/f^2$ , 得到:

$$Q \left( \frac{Gh}{f} \right)^2 \geq 2(QJ + S) \left( \frac{Gh}{f} \right).$$

所以:

$$Qz^2 \geq 2(QJ + S)z.$$

**情形 2:**  $\hat{R} > 0$ 。当:

$$\hat{R} > 0,$$

二阶 Hermitian 矩阵半正定等价于右下角正, 并且 Schur complement 非负。原文等价地看 determinant 条件。矩阵行列式:

$$\det = (Qh^2 - mf)\hat{R} - \left( (QJ + S)h - \frac{1}{2}Gm \right)^2.$$

把它看成  $m$  的二次函数:

$$am^2 + bm + c.$$

逐项展开: 平方项:

$$- \left( -\frac{1}{2}Gm \right)^2 = -\frac{1}{4}G^2m^2,$$

所以:

$$a = -\frac{1}{4}G^2.$$

一次项来自:

$$-mf\hat{R}$$

以及平方展开中的交叉项:

$$-[-(QJ + S)hGm] = (QJ + S)Ghm.$$

所以:

$$b = (QJ + S)Gh - \hat{R}f.$$

常数项:

$$c = \hat{R}Qh^2 - (QJ + S)^2h^2.$$

利用恒等式:

$$\hat{R}Q - (QJ + S)^2 = -(S^2 - QR),$$

得到:

$$c = -(S^2 - QR)h^2.$$

因为本章假设:

$$S^2 - QR > 0,$$

所以:

$$c \leq 0.$$

而:

$$a = -\frac{1}{4}G^2 < 0$$

因为  $G \neq 0$ 。存在实数  $m$  使二次函数非负, 要求判别式:

$$b^2 - 4ac \geq 0.$$

原文化简为:

$$\hat{R}f^2 - 2(QJ + S)fGh + Q(Gh)^2 \geq 0.$$

把:

$$z = \frac{Gh}{f}$$

代入, 并除以  $f^2$  后得到:

$$Qz^2 - 2(QJ + S)z + \hat{R} \geq 0.$$

这和  $\hat{R} = 0$  情况统一。

**统一判据。** 因此 cyclodissipativeness 的核心条件是:

$$\hat{R}(x) = R + 2SJ(x) + QJ(x)^2 \geq 0,$$

并且:

$$Qz(x)^2 - 2(QJ(x) + S)z(x) + \hat{R}(x) \geq 0,$$

其中:

$$z(x) = \frac{G(x)h(x)}{f(x)}.$$

区间端点。若  $Q \neq 0$ ，二次方程：

$$Qz^2 - 2(QJ + S)z + \hat{R} = 0$$

的根为：

$$z = \frac{(QJ + S) \pm \sqrt{(QJ + S)^2 - Q\hat{R}}}{Q}.$$

由恒等式：

$$(QJ + S)^2 - Q\hat{R} = S^2 - QR,$$

得到：

$$b_1(x) = \frac{QJ(x) + S - \sqrt{S^2 - QR}}{Q},$$

$$b_2(x) = \frac{QJ(x) + S + \sqrt{S^2 - QR}}{Q}.$$

若  $Q > 0$ ，二次函数开口向上，要求非负意味着  $z$  在两根外部。若  $Q < 0$ ，二次函数开口向下，要求非负意味着  $z$  在两根之间。若  $Q = 0$ ，不等式变成：

$$-2(QJ + S)z + \hat{R} \geq 0.$$

因为  $Q = 0$ ，所以  $QJ + S = S$ ， $\hat{R} = R + 2SJ$ 。于是：

$$-2Sz + R + 2SJ \geq 0.$$

若  $S > 0$ ：

$$z \leq J + \frac{R}{2S}.$$

若  $S < 0$ ：

$$z \geq J + \frac{R}{2S}.$$

定义：

$$b(x) = J(x) + \frac{R}{2S}.$$

**定理 47。** 在  $G(x) \neq 0$  且  $S^2 > QR$  下, 系统 cyclodissipative 当且仅当:

1.  $\hat{R}(x) \geq 0$  对所有  $x$  成立。
2.  $z(x) = G(x)h(x)/f(x)$  满足:
  - $Q > 0$ :  $z(x)$  在  $(b_1, b_2)$  外。
  - $Q < 0$ :  $z(x)$  在  $[b_2, b_1]$  内。注意由于  $Q < 0$ , 端点顺序可能与直觉相反。
  - $Q = 0, S > 0$ :  $z(x) \leq b(x)$ 。
  - $Q = 0, S < 0$ :  $z(x) \geq b(x)$ 。

若  $f(x) = 0$ ,  $z$  形式上无穷。原文指出此时直接回到矩阵条件, 所需条件是:

$$Qh(x)^2 \geq 0.$$

如果  $f = 0$  只发生在  $h = 0$  的点,  $z$  可能通过极限仍有意义; 否则  $Q < 0$  时会遇到困难。

#### 7.1.4 耗散性的通用条件

上一节只得到 cyclodissipativeness。要得到 dissipativeness, 需要 virtual storage function:

$$\phi(x) = \int_0^x m(\sigma) d\sigma$$

满足:

$$\phi(x) \geq 0 \quad \text{for all } x.$$

本节研究  $m(x)$  的符号, 从而判断积分的非负性。

一个特定的  $m(x)$ 。上一节中一个可用解为:

$$m(x) = \frac{2}{G(x)^2} \left[ (QJ(x) + S)G(x)h(x) - \hat{R}(x)f(x) \right].$$

把:

$$z(x) = \frac{G(x)h(x)}{f(x)}$$

代入:

$$(QJ + S)Gh - \hat{R}f = \left[ (QJ + S)z - \hat{R} \right] f.$$

定义:

$$\beta(x) = (QJ(x) + S)z(x) - \hat{R}(x).$$

于是:

$$m(x) = \frac{2}{G(x)^2} \beta(x) f(x).$$

因为：

$$G(x)^2 > 0,$$

$$m(x)$$

的符号由：

$$\beta(x) f(x)$$

决定。

$Q \leq 0$  时  $\beta(x) \leq 0$ 。原文通过端点代入证明：在定理 47 的 cyclodissipativeness 条件下，若：

$$Q \leq 0,$$

则：

$$\beta(x) \leq 0.$$

直观解释如下：

- $Q < 0$  时， $z$  被夹在允许区间内。
- 对该区间端点  $b$ ，可以计算：

$$(QJ + S)b - \hat{R}.$$

结果两个端点对应的值都非正。

- 因为  $\beta$  关于  $z$  是线性的，所以整个区间内都非正。
- 当  $Q = 0$  时，单侧边界给出：

$$(QJ + S)b - \hat{R} = -\frac{1}{2} \hat{R} \leq 0.$$

所以也得到  $\beta \leq 0$ 。

**借助自由系统稳定性推出  $\phi \geq 0$ 。** 一般情况下还需要知道  $f(x)$  的符号。原文考虑自由系统：

$$\dot{x} = f(x)$$

渐近稳定。对一阶系统，原点渐近稳定的充要条件是：

$$xf(x) < 0 \quad \text{for all } x \neq 0.$$

也就是说:

- $x > 0$  时, 必须  $f(x) < 0$ , 状态往左回到 0。
- $x < 0$  时, 必须  $f(x) > 0$ , 状态往右回到 0。

若  $Q \leq 0$ , 我们有  $\beta(x) \leq 0$ 。于是: 当  $x > 0$ :

$$f(x) < 0, \quad \beta(x) \leq 0$$

所以:

$$\beta(x)f(x) \geq 0, \quad m(x) \geq 0.$$

因此:

$$\int_0^x m(\sigma) d\sigma \geq 0.$$

当  $x < 0$ :

$$f(x) > 0, \quad \beta(x) \leq 0,$$

所以:

$$m(x) \leq 0.$$

但:

$$\phi(x) = \int_0^x m(\sigma) d\sigma = - \int_x^0 m(\sigma) d\sigma.$$

在  $[x, 0]$  上  $m(\sigma) \leq 0$ , 所以:

$$\int_x^0 m(\sigma) d\sigma \leq 0,$$

因此:

$$\phi(x) \geq 0.$$

这就是为什么自由系统稳定能把 cyclodissipativity 升级为 dissipativity。

$Q > 0$  时的充分条件。当：

$$Q > 0,$$

$\beta(x)$  不一定非正。为了得到足够条件，要求：

$$\beta(x) \leq 0.$$

也就是：

$$(QJ(x) + S)z(x) \leq \hat{R}(x)$$

若  $QJ + S > 0$ 。若  $QJ + S < 0$ ，不等号方向随除法反向。这个额外条件会把定理 47 中“ $z$  在区间外”的两个分支删掉一支，只保留能保证  $\phi \geq 0$  的分支。

**定理 48。** 假设：

- $G(x) \neq 0$ 。
- $S^2 > QR$ 。
- 自由系统  $\dot{x} = f(x)$  渐近稳定。

则系统 dissipative 的充分条件为：

1.  $\hat{R}(x) = R + 2SJ(x) + QJ(x)^2 \geq 0$ 。
2.  $z(x) = G(x)h(x)/f(x)$  满足：
  - $Q < 0$ ：在  $[b_2, b_1]$  内。
  - $Q = 0, S > 0$ ：在  $(-\infty, b]$  内。
  - $Q = 0, S < 0$ ：在  $[b, \infty)$  内。
  - $Q > 0, QJ + S > 0$ ：在  $(-\infty, b_1]$  内。
  - $Q > 0, QJ + S < 0$ ：在  $[b_2, \infty)$  内。

对  $Q \leq 0$ ，这些条件是必要且充分的。对  $Q > 0$ ，它们只是充分条件。

**例 1。** 系统：

$$\dot{x} = -x^3 + u,$$

$$y = \frac{ax^3}{1+x^2}.$$

对应：

$$f(x) = -x^3, \quad G(x) = 1, \quad J(x) = 0, \quad h(x) = \frac{ax^3}{1+x^2}.$$

计算：

$$z(x) = \frac{G(x)h(x)}{f(x)} = \frac{\frac{ax^3}{1+x^2}}{-x^3} = -\frac{a}{1+x^2}.$$

因为:

$$1 + x^2 \geq 1,$$

所以:

$$z(x) \in [-a, 0].$$

选:

$$S = 1, \quad R = 0, \quad Q = -\frac{2}{a}.$$

则  $Q < 0$ , 对应区间端点正好为:

$$b_2 = -a, \quad b_1 = 0.$$

因此系统是:

$$\left(-\frac{2}{a}, 1, 0\right)$$

dissipative。storage derivative 可取:

$$m(x) = \frac{2ax^3}{1+x^2}.$$

于是:

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{2a\xi^3}{1+\xi^2} d\xi.$$

化简被积函数:

$$\frac{\xi^3}{1+\xi^2} = \xi - \frac{\xi}{1+\xi^2}.$$

所以:

$$\phi(x) = 2a \int_0^x \left[ \xi - \frac{\xi}{1+\xi^2} \right] d\xi.$$

第一项:

$$2a \int_0^x \xi d\xi = ax^2.$$

第二项:

$$2a \int_0^x \frac{\xi}{1+\xi^2} d\xi.$$

令：

$$r = 1 + \xi^2, \quad dr = 2\xi d\xi.$$

则：

$$2a \int_0^x \frac{\xi}{1 + \xi^2} d\xi = a \int_1^{1+x^2} \frac{1}{r} dr = a \ln(1 + x^2).$$

因此：

$$\phi(x) = ax^2 - a \ln(1 + x^2).$$

因为：

$$\ln(1 + x^2) \leq x^2,$$

所以：

$$\phi(x) \geq 0.$$

### 7.1.5 具有线性动态的系统

本节研究一个重要特例：状态动态对  $x, u$  是线性的，非线性只在输出读出  $h(x)$  中。系统：

$$\dot{x} = -\alpha x + Gu,$$

$$y = h(x) + Ju.$$

其中：

- $\alpha \geq 0$ 。
- $G, J$  是常数。
- $h(x)$  可能非线性。

这正是许多 Popov/circle criterion 中的“线性一阶动态 + 静态非线性”结构。

**Systems with a pole in the left half plane.** 先考虑：

$$\alpha > 0.$$

自由系统：

$$\dot{x} = -\alpha x$$

显然渐近稳定。此时：

$$f(x) = -\alpha x.$$

所以：

$$z(x) = \frac{Gh(x)}{-\alpha x}.$$

把  $z$  的区间条件翻译成  $Gh(x)$  相对于  $x$  的 sector 条件。“ $Gh(x)$  lies inside sector  $[k_1, k_2]$ ” 的含义是：

$$k_1 x^2 \leq x Gh(x) \leq k_2 x^2.$$

等价于对  $x \neq 0$ ：

$$k_1 \leq \frac{Gh(x)}{x} \leq k_2.$$

**定理 49: cyclodissipativeness.** 当  $\alpha > 0, G \neq 0, S^2 > QR$  时, 系统 cyclodissipative 当且仅当：

1.

$$R + 2SJ + QJ^2 \geq 0.$$

2.  $Gh(x)$  满足对应 sector 条件。

若  $Q \neq 0$ , 定义：

$$k_1 = -\frac{\alpha}{Q} \left( QJ + S - \sqrt{S^2 - QR} \right),$$

$$k_2 = -\frac{\alpha}{Q} \left( QJ + S + \sqrt{S^2 - QR} \right).$$

若  $Q = 0$ , 定义：

$$k = -\alpha \left( J + \frac{R}{2S} \right).$$

则：

- $Q > 0$ :  $Gh(x)$  在 sector  $(k_2, k_1)$  外。
- $Q < 0$ :  $Gh(x)$  在 sector  $[k_1, k_2]$  内。
- $Q = 0, S > 0$ :  $Gh(x)$  在 sector  $[k, \infty)$  内。
- $Q = 0, S < 0$ :  $Gh(x)$  在 sector  $(-\infty, k]$  内。

**定理 50: dissipativeness.** 因为  $\alpha > 0$  时自由系统稳定, 定理 48 可直接应用。系统 dissipative 的条件:

1.

$$R + 2SJ + QJ^2 \geq 0.$$

2.  $Gh(x)$  满足:

- $Q < 0$ : sector  $[k_1, k_2]$ 。
- $Q = 0, S > 0$ : sector  $[k, \infty)$ 。
- $Q = 0, S < 0$ : sector  $(-\infty, k]$ 。
- $Q > 0, QJ + S > 0$ : sector  $[k_1, \infty)$ 。
- $Q > 0, QJ + S < 0$ : sector  $(-\infty, k_2]$ 。

对  $Q \leq 0$ , 这些条件必要且充分。对  $Q > 0$ , 是充分条件。

**sector bound 的符号。** 原文列出几个有用符号关系:

- $Q < 0$ :  $k_1 \leq 0 \leq k_2$ 。
- $Q = 0, S > 0$ :  $k \leq 0$ 。
- $Q = 0, S < 0$ :  $k \geq 0$ 。
- $Q > 0, QJ + S > 0$ :  $k_2 \leq k_1 \leq 0$ 。
- $Q > 0, QJ + S < 0$ :  $k_1 \geq k_2 \geq 0$ 。

这些符号关系帮助把判据解释成“非线性斜率在某个扇区中”。

**与 Popov criterion 的连接。** 若线性系统为:

$$\frac{1}{1 + \alpha s}$$

后接 sector nonlinearity  $h$ , 可取:

$$G = \alpha, \quad J = 0.$$

此时 sector bounds 对  $\alpha$  的依赖会抵消, 得到 Popov criterion 中熟悉的 sector 条件。

**从 sector bounds 反推  $(Q, S, R)$ 。** 实际中经常已知非线性 sector:

$$h(x) \in [h_1, h_2].$$

原文列出多种情况, 例如:

- 若  $h_1 \leq 0 \leq h_2$ , 可取:

$$(Q, S, R) = \left( -1, \frac{1}{2}(h_1 + h_2), -h_1 h_2 \right).$$

这就是标准 sector  $[h_1, h_2]$  对应的 conic/passivity-like 供给率。

- 若 sector 全在正半轴或负半轴，可得到半平面型  $(0, \pm 1, 0)$  或更少保守的参数。

重要点是:  $(Q, S, R)$  不唯一。若系统对  $(Q, S, R)$  dissipative, 则对更保守的  $Q_1 \geq Q, R_1 \geq R$  也可能 dissipative。

**An integrator plus nonlinearity.** 现在考虑:

$$\alpha = 0.$$

系统变为:

$$\dot{x} = Gu,$$

$$y = h(x) + Ju.$$

这是积分器加非线性读出。

**定理 51: cyclo-dissipativeness.** 定理说, 该系统 cyclo-dissipative 的充要条件是:

$$R + 2SJ + QJ^2 \geq 0,$$

并且:

$$Q \geq 0.$$

为什么? 因为此时:

$$f(x) = 0.$$

第 9.3 的  $z = Gh/f$  无法使用。回到矩阵条件:

$$\begin{bmatrix} Qh^2 & (QJ + S)h - \frac{1}{2}Gm \\ (QJ + S)h - \frac{1}{2}Gm & \hat{R} \end{bmatrix} \geq 0.$$

显然要有:

$$Qh^2 \geq 0$$

对所有  $h$  成立, 因此需要:

$$Q \geq 0.$$

还需要:

$$\hat{R} = R + 2SJ + QJ^2 \geq 0.$$

这两个条件也是充分的，因为可以选择：

$$m(x)$$

使非对角项为零：

$$(QJ + S)h - \frac{1}{2}Gm = 0.$$

**定理 52: dissipativeness 的充分条件。** 一个可选解为：

$$m(x) = \frac{2(QJ + S)}{G}h(x).$$

storage function:

$$\phi(x) = \int_0^x m(\sigma)d\sigma.$$

若：

$$\frac{QJ + S}{G} > 0,$$

且  $h(x)$  位于 sector  $[0, \infty)$ ，即：

$$xh(x) \geq 0,$$

则  $m(x)$  与  $x$  同号，从而  $\phi(x) \geq 0$ 。若：

$$\frac{QJ + S}{G} < 0,$$

则需要  $h(x)$  位于 sector  $(-\infty, 0]$ ，即：

$$xh(x) \leq 0.$$

因此定理 52 给出充分条件：

- $\hat{R} \geq 0$ 。
- $Q \geq 0$ 。
- $h$  的 sector 符号与  $(QJ + S)/G$  匹配。

原文强调：这个 sector 条件充分但不必要。

**例 2: sector 条件不必要。** 系统:

$$\dot{x} = u, \quad y = h(x).$$

其中  $h(x)$  在相邻区间上取 1 和  $-3$ :

$$h(x) = 1$$

若  $x \in (N, N + 1]$  且  $N$  偶数;

$$h(x) = -3$$

若  $x \in (N, N + 1]$  且  $N$  奇数。这个  $h(x)$  不满足简单 sector 条件, 甚至:

$$\int_0^x h(\sigma) d\sigma$$

可能向负无穷发散。但仍可证明系统是:

$$(1, 2, 1)$$

dissipative, 使用分段 storage function:

$$\phi(x) = 6(x - N)$$

在偶数区间,

$$\phi(x) = 6 - 6(x - N)$$

在奇数区间。这个例子说明: 由于  $m(x)$  的解不唯一, 简单 sector 条件不是完整刻画。第 9 章把第 5 章的一般代数条件在一阶标量系统中显式解出。核心记忆点:

- cyclo-dissipativeness 由  $z(x) = G(x)h(x)/f(x)$  的区间条件给出。
- dissipativeness 需要积分出的  $\phi(x) \geq 0$ 。
- 若自由系统  $\dot{x} = f(x)$  渐近稳定且  $Q \leq 0$ , cyclo-dissipativeness 可升级为 dissipativity。
- 线性一阶动态加非线性读出会自然导出 sector 条件, 与 Popov/circle criterion 相连。

## 7.2 扩展结果: 松弛判据、连接稳定、最优控制与延迟

### 7.2.1 松弛稳定性判据

第 6 章的互联系统稳定定理要求:

$$\hat{Q} = Q - SH - H^T S^T + H^T R H < 0.$$

第 10.1 节问：如果只能得到：

$$\hat{Q} \leq 0,$$

能不能仍然推出稳定？答案是：有时可以。方法是利用子系统的第二组 dissipativity 参数，给  $\hat{Q}$  的零方向补上负定性。

**Combining dissipativeness parameters.** 一个子系统可能同时满足多种 dissipativity。例如它既 passive，又 finite gain。设第  $i$  个子系统同时是：

$$(Q_i^{(1)}, S_i^{(1)}, R_i^{(1)})$$

和：

$$(Q_i^{(2)}, S_i^{(2)}, R_i^{(2)})$$

dissipative。如果某些子系统没有第二组三元组，就令：

$$(Q_i^{(2)}, S_i^{(2)}, R_i^{(2)}) = (0, 0, 0).$$

因为耗散不等式对正数倍和加法封闭，所以对任意：

$$\alpha \geq 0,$$

子系统也是：

$$(Q_i^{(1)} + \alpha Q_i^{(2)}, S_i^{(1)} + \alpha S_i^{(2)}, R_i^{(1)} + \alpha R_i^{(2)})$$

dissipative。对整体互联重新计算：

$$\hat{Q}(\alpha) = \hat{Q}^{(1)} + \alpha \hat{Q}^{(2)}.$$

如果能找到：

$$\alpha \geq 0$$

使：

$$\hat{Q}^{(1)} + \alpha \hat{Q}^{(2)} < 0,$$

则整体稳定。

把  $\hat{Q}^{(2)}$  拆成好项和坏项。通常  $\hat{Q}^{(2)}$  不一定半负定。原文把它写成：

$$\hat{Q}^{(2)} = Q_B - Q_C,$$

其中：

$$Q_B \leq 0, \quad Q_C \leq 0.$$

这里符号有点反直觉： $Q_B$  是“有益”的负项，能补  $\hat{Q}^{(1)}$  的秩亏； $Q_C$  是会抵消负性的项。目标是： $Q_B$  必须在  $\hat{Q}^{(1)}$  的零空间方向提供新的负性，而  $Q_C$  不能在这些方向制造麻烦。

**引理 11。** 若：

$$A \geq 0, \quad C \geq 0,$$

且：

$$\text{rank}[A \ C] = \text{rank} A,$$

则存在：

$$\alpha > 0$$

使：

$$A - \alpha C \geq 0.$$

直观解释：秩条件表示  $C$  的列空间没有超出  $A$  的列空间。也就是说， $C$  只作用在  $A$  已经能“看见”的方向上。因此取足够小的  $\alpha$ ，不会破坏  $A$  的半正定性。证明中用非奇异矩阵  $T$  把  $A$  的零行/非零行分离：

$$TA = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

秩条件迫使  $TC$  的对应下半块为零。再对行列同时变换，得到：

$$T(A - \alpha C)T^* = \begin{bmatrix} A_{11} - \alpha C_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

只要  $\alpha$  足够小，第一块仍半正定。

**引理 12。** 若：

$$A, B, C \geq 0,$$

且：

$$\text{rank}[A \ B] = n,$$

$$\text{rank}[A \ C] = \text{rank } A,$$

则存在：

$$\alpha \geq 0$$

使：

$$A + \alpha(B - C) > 0.$$

含义：

- $B$  补足  $A$  的零方向，所以  $[A \ B]$  满秩。
  - $C$  不增加  $A$  的列空间，所以可用小  $\alpha$  控制。
- 于是  $A + \alpha(B - C)$  变成正定。

**定理 53。** 把符号换回稳定问题。若：

$$\hat{Q}^{(1)} \leq 0,$$

且：

$$\text{rank}[\hat{Q}^{(1)} \ Q_B] = n,$$

$$\text{rank}[\hat{Q}^{(1)} \ Q_C] = \text{rank } \hat{Q}^{(1)},$$

则互联系统稳定。证明就是令：

$$A = -\hat{Q}^{(1)} \geq 0, \quad B = -Q_B \geq 0, \quad C = -Q_C \geq 0.$$

由引理 12，存在  $\alpha$ ，使：

$$-\hat{Q}^{(1)} + \alpha(-Q_B + Q_C) > 0.$$

等价于：

$$\hat{Q}^{(1)} + \alpha(Q_B - Q_C) < 0.$$

也就是：

$$\hat{Q}^{(1)} + \alpha \hat{Q}^{(2)} < 0.$$

**例子：三个 passive 系统。** 原文考虑三个 passive 系统和一个互联矩阵。仅用 passivity 得到的  $\hat{Q}^{(1)}$  只是半负定，在某个方向上缺少严格性。如果第二个系统有增益下界：

$$\langle y_2, y_2 \rangle_T \geq \epsilon \langle u_2, u_2 \rangle_T,$$

则它是：

$$\left( \frac{1}{\epsilon}, 0, -1 \right)$$

dissipative。这个第二组参数能提供缺失方向上的秩，从而满足定理 53。如果改为知道第三个系统 finite gain，也能补足缺失方向。重点是：并不一定需要知道具体增益数值，只要知道某个正增益界存在，就能形成秩条件。

**Using finite gain constraints。** 现在假设部分子系统还已知 finite gain：

$$\|y_i\|_T \leq k_i \|u_i\|_T.$$

定义对角矩阵  $D$ ，标记哪些输出具有 finite gain：

$$D_{ii} = 1$$

若第  $i$  个输出有 finite gain，否则：

$$D_{ii} = 0.$$

定义  $K$  为由增益  $k_i$  构成的对角矩阵，没有 finite gain 的位置设为 0。finite gain 对应第二组参数，计算得到：

$$\hat{Q}^{(2)} = -D + H^T K D K H.$$

定理 54 给出充分条件：

$$\hat{Q}^{(1)} \leq 0,$$

$$\text{rank}[\hat{Q}^{(1)} \ D] = n,$$

$$\text{rank}[\hat{Q}^{(1)} \ DH] = \text{rank} \hat{Q}^{(1)}.$$

这个结果很实用，因为不需要知道  $k_i$  的数值，只要知道哪些子系统 finite gain。

### 7.2.2 连接稳定性

connective stability 指：互联系统稳定，而且在互联被削弱或替换成满足某种 sector/gain 限制的非线性后仍稳定。这里的“削弱”被建模为：原来从子系统  $j$  到子系统  $i$  的线性增益  $H_{ij}$ ，替换成 sector：

$$[-|H_{ij}|, |H_{ij}|]$$

中的非线性，允许有记忆，但要求 finite gain 不超过 1。

**系统设置。** 原始  $N$  个 SISO 子系统：

$$y_i = G_i(u_i).$$

它们整体满足：

$$(Q_0, S_0, 0)$$

dissipativity。互联方程：

$$u_i = u_{ei} - a_{ii}y_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}\psi_{ij}(y_j).$$

其中  $\psi_{ij}$  是替代原线性互联的非线性，满足增益界：

$$\|\psi_{ij}(v)\|_T \leq \|v\|_T.$$

因此每个  $\psi_{ij}$  可看成一个新子系统，且是：

$$(-p_k, 0, p_k)$$

dissipative，其中  $p_k > 0$  可任意选。

**扩展系统。** 把所有  $\psi_{ij}$  都作为额外子系统加入后，总共有：

$$N + N^2$$

个子系统。互联矩阵写成块形式：

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

其中：

- $H_{11} = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{NN})$ ，表示本地线性反馈。
- $H_{12}$  包含所有跨子系统耦合系数  $a_{ij}$ 。
- $H_{21}$  把原系统输出送入新增非线性子系统。

原系统参数:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}.$$

这里  $P > 0$  是可选对角矩阵。代入:

$$\hat{Q} = Q - SH - H^T S^T + H^T R H.$$

经过块矩阵计算, 可得到  $-\hat{Q}$  的结构由  $Q_0, S_0, H_{11}, H_{12}, P$  决定。关键是可以选择  $P$  使  $-\hat{Q}$  quasidominant。

**定理 55。** 结论: 在上述设置中, 整体系统稳定, 如果:

$$AS_0 - \frac{1}{2}Q_0$$

是 quasidominant matrix。这里  $A = [a_{ij}]$  是互联系数矩阵。quasidominance 的定义在附录中: 存在  $d_i > 0$ , 使每一行的带权对角项大于带权非对角项绝对值之和。

**延迟微分方程应用。** 考虑:

$$\frac{dx_i}{dt} = -a_{ii}x_i(t) + \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j(t - T_{ij}).$$

其中  $T_{ij}$  是任意时延。每个积分器是 passive; 每个时间延迟是 gain bound 为 1 的 finite-gain 系统。由定理 55, 只要由  $a_{ij}$  组成的矩阵满足 quasidominance, 就能推出稳定性, 而且对任意时延成立。这就是 connective stability 的意义: 互联结构有足够强的对角主导性, 即使连接中加入延迟或 sector 非线性, 系统仍稳定。

### 7.2.3 一个最优控制问题

本节建立 dissipativity 与 inverse optimal control 的关系: 给定一个反馈律:

$$u = -k(x),$$

它什么时候是某个二次输入代价问题的最优控制? 答案: 当且仅当开环系统以  $u$  为输入、 $k(x)$  为输出时是  $(R, R, 0)$ -dissipative。

**最优控制问题。** 系统:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u.$$

性能指标:

$$J(x(0)) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \left[ n(x(t_f)) + \int_0^{t_f} (m(x) + u^T R u) dt \right].$$

其中:

- $R = R^T > 0$ 。
- $m(0) = 0, n(0) = 0$ 。
- $m(x) \geq 0, n(x) \geq 0$ 。

Hamiltonian:

$$H(V, x, u) = m(x) + u^T R u + \nabla V^T f(x) + \nabla V^T G(x)u.$$

对  $u$  求极小。梯度为:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2Ru + G(x)^T \nabla V.$$

令其为零:

$$2Ru + G^T \nabla V = 0.$$

所以:

$$u = -\frac{1}{2}R^{-1}G^T \nabla V.$$

定义:

$$k(x) = \frac{1}{2}R^{-1}G(x)^T \nabla V.$$

则最优控制为:

$$u = -k(x).$$

**HJB 方程。** 有限时间 HJB 方程:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(V, x, -k(x)) = 0.$$

代入最优控制得到:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \nabla V^T f - \frac{1}{4} \nabla V^T G R^{-1} G^T \nabla V + m(x) = 0.$$

无限时间极限中:

$$V(x, t; t_f) \rightarrow \phi(x),$$

且  $\partial \phi / \partial t = 0$ 。于是:

$$\nabla\phi^T f - \frac{1}{4}\nabla\phi^T GR^{-1}G^T\nabla\phi + m(x) = 0.$$

因为:

$$k(x) = \frac{1}{2}R^{-1}G^T\nabla\phi,$$

所以:

$$G^T\nabla\phi = 2Rk.$$

于是:

$$\frac{1}{4}\nabla\phi^T GR^{-1}G^T\nabla\phi = k^T Rk.$$

HJB 方程变为:

$$\nabla\phi^T f - k^T Rk + m(x) = 0.$$

**关键恒等式。** 对任意输入  $u$ :

$$\frac{d\phi}{dt} = \nabla\phi^T(f + Gu) = \nabla\phi^T f + \nabla\phi^T Gu.$$

又:

$$\nabla\phi^T Gu = (G^T\nabla\phi)^T u = (2Rk)^T u = 2k^T Ru.$$

所以:

$$\dot{\phi} = \nabla\phi^T f + 2k^T Ru.$$

由:

$$\nabla\phi^T f = k^T Rk - m(x),$$

得:

$$\dot{\phi} = k^T Rk - m(x) + 2k^T Ru.$$

移项:

$$m(x) + u^T Ru = u^T Ru + k^T Rk + 2k^T Ru - \dot{\phi}.$$

右边前三项是:

$$(u + k)^T R(u + k).$$

因此:

$$m(x) + u^T R u = (u + k)^T R (u + k) - \dot{\phi}.$$

积分:

$$\int_0^T (m(x) + u^T R u) dt = \int_0^T (u + k)^T R (u + k) dt + \phi(x(0)) - \phi(x(T)).$$

**optimal feedback 的 dissipativity.** 因为  $m(x) \geq 0$ , 从上式可推出:

$$\phi(x(0)) + \int_0^T [k^T R k + 2k^T R u] dt \geq \phi(x(T)).$$

这说明开环系统:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad y = k(x)$$

是:

$$(R, R, 0)$$

dissipative。因为供给率为:

$$y^T R y + 2y^T R u.$$

闭环时:

$$u = u_e - k(x).$$

代入后得到闭环系统对外部输入  $u_e$ 、输出  $k(x)$  是:

$$(-R, R, 0)$$

dissipative。这意味着闭环具有很好的稳定裕度。另一个等价表达是:

$$\phi(x(0)) + \int_0^T (u_e^T R u_e - u^T R u) dt \geq \phi(x(T)).$$

特别地若:

$$x(0) = 0,$$

则:

$$\int_0^T u^T R u dt \leq \int_0^T u_e^T R u_e dt.$$

这表示反馈总是在  $R$ -能量意义下降低进入原系统的输入, 松散地说, 它总是“负反馈”。

**定理 56。** 给定 stabilising control:

$$u = -k(x),$$

它是某个指标:

$$\int (m(x) + u^T R u) dt$$

的最优控制, 当且仅当系统:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad y = k(x)$$

是:

$$(R, R, 0)$$

dissipative。必要性已经由 HJB 推出。充分性的证明: 若存在 storage function  $\phi$ , 使:

$$\phi(x(0)) + \int_0^T (k^T R k + 2k^T R u) dt \geq \phi(x(T)),$$

把不等式写成等式加平方耗散:

$$\begin{aligned} & \phi(x(0)) + \int_0^T (k^T R k + 2k^T R u) dt \\ &= \phi(x(T)) + \int_0^T (\ell(x) + W u)^T (\ell(x) + W u) dt. \end{aligned}$$

微分比较会迫使:

$$W = 0.$$

于是定义:

$$m(x) = \ell(x)^T \ell(x) \geq 0, \quad n(x) = \phi(x).$$

就得到一个最优控制问题, 其最优输入为:

$$u = -k(x).$$

## 7.2.4 耗散延迟

本节解释多个 storage function 的物理意义: 同一个输入输出系统可能有不同内部实现, 它们总耗散相同, 但耗散发生的时间早晚不同。

**dissipation function**。定义：

$$\phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} w(t) dt = \phi(x(t_1)) + D(x(t_0), u, t_0, t_1),$$

其中：

$$w(t) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u.$$

若系统 dissipative, 则：

$$D \geq 0.$$

一对  $[\phi, D]$  称为该系统的一个 realisation。

**引理 13: 闭合循环总耗散与 realization 无关。** 若  $[\phi_1, D_1]$  和  $[\phi_2, D_2]$  是同一系统的两个 realisation, 并且轨迹闭合：

$$x(t_1) = x(t_0) = x_0,$$

则：

$$D_1(x_0, u, t_0, t_1) = D_2(x_0, u, t_0, t_1).$$

证明很简单。闭合时：

$$\phi(x(t_1)) = \phi(x(t_0)).$$

所以：

$$D = \int_{t_0}^{t_1} w(t) dt.$$

右边只依赖输入输出, 不依赖 storage function 的选择。

**dissipation delay 的定义。** 定义：

$$[\phi_1, D_1] \prec [\phi_2, D_2]$$

若对所有输入和所有  $t_1 \geq t_0$ ：

$$D_1(0, u, t_0, t_1) \geq D_2(0, u, t_0, t_1).$$

这表示 realization 1 的耗散更早发生, 因此 dissipation delay 更小。

**定理 57。** 定理:

$$[\phi_1, D_1] \prec [\phi_2, D_2] \iff \phi_1(x) \leq \phi_2(x) \text{ for all } x.$$

直觉: 若  $\phi_1$  的储能容量更小, 那么同样输入能量进来时, 它更少把能量暂存起来, 更多立即耗散掉。因此 dissipation delay 更小。

**一阶 passive 例子。** 系统:

$$\dot{x} = -x + u,$$

$$y = x + \frac{1}{2}u.$$

它是 passive, 即:

$$\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

dissipative。可用 storage function:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}Cx^2,$$

其中:

$$2 - \sqrt{3} \leq C \leq 2 + \sqrt{3}.$$

耗散函数为:

$$D = \int_0^T \left[ Cx^2 + (1 - C)ux + \frac{1}{2}u^2 \right] dt.$$

配方:

$$Cx^2 + (1 - C)ux + \frac{1}{2}u^2 = C(x - \gamma u)^2 + Ru^2,$$

其中:

$$\gamma = \frac{C - 1}{2C},$$

$$R = \frac{1}{2} - C\gamma^2.$$

当  $C$  在上述区间内,  $R \geq 0$ 。区间两端  $R = 0$ 。物理解释: 不同  $C$  对应不同电路实现。小  $C$  更像 available storage, 大  $C$  更像 required supply。它们在闭合循环中总耗散相同, 但耗散的相位/延迟不同。原文还指出, 在线性系统中可定义 dissipation outputs:

$$y_1 = \sqrt{R}u, \quad y_2 = \sqrt{C}(x - \gamma u).$$

随着  $C$  改变,  $y_2$  相对  $u$  的相位滞后改变; 但周期运动的净耗散率不变。这把 dissipation delay 与 phase lag 联系起来。

### 7.2.5 结构分解结果

本节证明一个结构分解: 任意满足条件的 passive system 可以分解成一个 lossless subsystem 和一个 memoryless passive subsystem 的 neutral interconnection。这推广了线性电路理论中的事实: 无源电路可以看作储能元件和无记忆耗散元件的互联。

**原系统。** 考虑:

$$\dot{x} = F(x, u),$$

$$y = H(x, u).$$

passivity 等价于:

$$\left( 0, \frac{1}{2}I, 0 \right)$$

dissipativity。若存在可微 storage function  $\phi(x)$ , 微分耗散不等式为:

$$H(x, u)^T u - \nabla \phi(x)^T F(x, u) \geq 0.$$

**梯度可逆假设。** 需要假设映射:

$$x \mapsto \nabla \phi(x)$$

可逆。设其逆为  $A$ , 即:

$$A(\nabla \phi(x)) = x.$$

线性 minimal 情形下这个可逆性常可由状态实现性质推出; 非线性情形则要逐案检查。作者猜测 storage function 的凸性可能足以保证梯度可逆, 但没有在本书中证明。

**第一个子系统: lossless storage subsystem.** 定义子系统 1:

$$\dot{x} = u_1,$$

$$y_1 = \nabla\phi(x).$$

计算供给积分:

$$\int_{t_0}^{t_1} u_1(t)^T y_1(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)^T \nabla\phi(x(t)) dt.$$

由链式法则:

$$\dot{x}^T \nabla\phi = \frac{d}{dt} \phi(x(t)).$$

所以:

$$\int_{t_0}^{t_1} u_1^T y_1 dt = \phi(x(t_1)) - \phi(x(t_0)).$$

这正是 lossless: 输入能量完全变成储能变化, 没有耗散。

**第二个子系统: memoryless passive subsystem.** 定义子系统 2, 输入为:

$$\begin{bmatrix} u \\ u_2 \end{bmatrix},$$

输出为:

$$\begin{bmatrix} y \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

令:

$$\begin{bmatrix} y \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(A(u_2), u) \\ -F(A(u_2), u) \end{bmatrix}.$$

这个系统是 memoryless, 因为输出只依赖当前输入  $u, u_2$ , 没有自己的动态状态。

**neutral interconnection.** 把两个子系统按:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

互联。于是:

$$u_1 = -y_2, \quad u_2 = y_1.$$

因为:

$$y_1^T u_1 + y_2^T u_2 = y_1^T (-y_2) + y_2^T y_1 = 0,$$

互联本身不产生也不消耗功率, 是 neutral/lossless interconnection。

**验证恢复原系统。** 由子系统 1:

$$y_1 = \nabla \phi(x).$$

互联给出:

$$u_2 = y_1 = \nabla \phi(x).$$

因为  $A$  是  $\nabla \phi$  的逆:

$$A(u_2) = x.$$

子系统 2 给出:

$$y = H(A(u_2), u) = H(x, u),$$

$$y_2 = -F(A(u_2), u) = -F(x, u).$$

互联还给出:

$$u_1 = -y_2 = F(x, u).$$

但子系统 1 的状态方程是:

$$\dot{x} = u_1.$$

所以:

$$\dot{x} = F(x, u).$$

这正是原系统。

验证第二个子系统 passive。第二个子系统的供给率是：

$$y^T u + y_2^T u_2.$$

代入：

$$y^T u = H(x, u)^T u,$$

$$y_2^T u_2 = (-F(x, u))^T \nabla \phi(x) = -\nabla \phi(x)^T F(x, u).$$

因此：

$$y^T u + y_2^T u_2 = H(x, u)^T u - \nabla \phi(x)^T F(x, u).$$

由原系统 passivity 微分不等式：

$$H^T u - \nabla \phi^T F \geq 0.$$

所以第二个子系统 passive。任意满足梯度可逆条件的 passive system 都可实现为：

lossless dynamic subsystem + memoryless passive subsystem

通过 neutral interconnection 相连。电路解释中，lossless subsystem 可看成电容组或电感组，memoryless subsystem 是电阻性无源网络。作者也指出，对更一般 dissipative systems，目前还缺少合适的 neutral interconnection 定义，因此还没有同样完整的结构定理。

# 第八章 控制工程应用：电力电子、微电网与端口无源化

检查:  $Y + Y^H \geq 0$

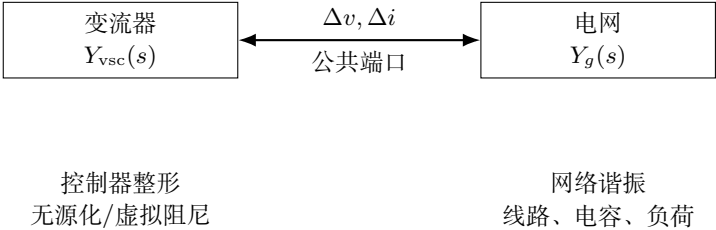


图 8.1 电网-变流器互联的端口视角：电网给出阻抗/导纳环境，变流器给出可设计的端口动态。

本章把前面建立的耗散语言放回现代电力系统。低惯量、电力电子主导和弱电网问题之所以适合用无源性讨论，是因为它们本质上都是“端口互联后是否产生负阻尼”的问题。端口变量可以取电压、电流，也可以取  $dq$  坐标下的小信号量；稳定性不再只靠完整闭环矩阵的特征值判断，而可以转化为各个设备端口是否向互联网络贡献足够阻尼。

## 8.1 为什么现代电网需要端口无源性

传统同步机电网中，大量旋转惯量和线路损耗提供天然阻尼。电力电子并网后，控制器、锁相环、采样延迟、电流环、功率环等都会改变端口阻抗。若在某个频段端口导纳的实部为负，则该设备在该频段表现为负阻尼，可能放大电网中的谐振模态。对单输入单输出导纳  $Y(j\omega)$ ，高频无源判据常写成

$$\text{Re } Y(j\omega) \geq 0.$$

在  $dq$  坐标和低频外环作用下，导纳通常是 MIMO 矩阵  $Y(j\omega)$ ，此时对应条件为

$$Y(j\omega) + Y(j\omega)^H \geq 0.$$

这正是频域正实性的矩阵版本。

**评注 8.1 (无源性是充分条件)**。端口无源性不是稳定的必要条件。很多系统在某些频段非无源但仍稳定。它的价值在于模块化：若电网和设备都满足合适无源或耗散裕度条件，则不用精确知道所有闭环细节，也能给出稳定保证。

## 8.2 从输入导纳看变流器控制

并网电压源变流器常用 Norton 或 Thevenin 等效表示。以导纳形式为例，小信号电流和端口电压满足

$$\Delta i(s) = Y_{\text{vsc}}(s)\Delta v(s) + \Delta i_{\text{src}}(s).$$

若只关注互联稳定，独立源项不改变端口耗散性，核心是  $Y_{\text{vsc}}(s)$ 。电网侧可写为

$$\Delta i_g(s) = Y_g(s)\Delta v(s).$$

闭环端口平衡给出

$$Y_{\text{vsc}}(s)\Delta v(s) + Y_g(s)\Delta v(s) = 0.$$

如果  $Y_g$  被视为无源网络，而  $Y_{\text{vsc}}$  在关键频带也无源或具有足够耗散裕度，则端口互联不易产生自激振荡。

## 8.3 高频与低频问题为什么不同

高频段中，外层功率环和同步环通常可以忽略，主要负阻尼来源是数字控制延迟和电流环动态。此时常可以使用 SISO 或近似对称模型，设计目标是消除实部为负的频带。低频段则完全不同。锁相环、功率同步、直流电压控制和交流电压控制会引入  $d$  轴与  $q$  轴耦合，使系统不能再被简单看成一个标量阻抗。此时必须使用 MIMO 条件，例如最小特征值

$$\lambda_{\min} \left( \frac{Y(j\omega) + Y(j\omega)^H}{2} \right)$$

作为无源裕度指标。若该指标为负，说明存在某个端口方向会向外注入小信号能量。

## 8.4 无源化、虚拟阻尼与控制设计

所谓无源化，就是通过控制器让端口从“可能产生负阻尼”变成“至少不产生负阻尼”。常见方法包括：

1. 调整电流环和前馈结构，补偿采样与 PWM 延迟造成的相位滞后；
2. 引入虚拟电阻或虚拟电抗，使关键谐振附近的等效导纳实部变为非负；
3. 重新设计锁相环或同步单元，减小低频  $q$  轴负阻特性；
4. 使用广义 KYP 或带权无源性，只在目标频带内施加耗散约束。

这些方法本质上都在改变供给率或端口算子，使

$$\int_0^T w(u, y) dt - \Delta V \geq 0$$

在设计关注的频段或工作点附近成立。

## 8.5 微电网模型为什么不能随意降阶

逆变器型微电网存在多个时间尺度：电磁网络最快，内环控制其次，功率控制和同步最慢。传统大电网中常把线路动态代数化，但在逆变器微电网中，网络动态虽然快，却可能影响慢模态稳定边界。因此建模时不能只凭“时间常数小”就删掉网络状态，而应检查被删动态是否仍以端口方式保持无源或至少保持足够耗散。

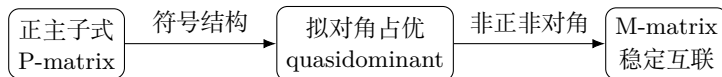
## 8.6 给工程读者的检查流程

实际使用无源理论时，可按以下流程组织：

1. 明确端口变量和符号方向，确认  $u^T y$  表示进入子系统的功率或广义功率；
2. 得到设备的线性化导纳或阻抗模型，必要时用  $dq$  MIMO 矩阵表示；
3. 检查极点稳定性，避免把内部不稳定模态误判为端口无源；
4. 计算 Hermitian 部分的最小特征值或 SISO 实部；
5. 若存在负阻尼频段，判断该频段是否与电网谐振重叠；
6. 通过虚拟阻尼、前馈、同步环整形或频带 KYP 约束进行无源化；
7. 最后用闭环特征值、Nyquist 或时域仿真复核充分条件的保守性。

**评注 8.2 (应用中的边界)** . 无源性判据特别适合模块化和缺少完整电网信息的场景，但它不是万能判据。低频 MIMO 变流器中，不同无源指标可能给出冲突设计方向；此时应把无源指标作为稳定性设计的结构化信息，而不是唯一优化目标。

## 附录 A 矩阵工具附录



用途：把复杂互联条件转化为可检查的矩阵正性

图 A.1 矩阵正性工具之间的关系：主子式、拟对角占优与 M 矩阵。

本附录收集正文中反复使用的矩阵结果。读者第一次学习时不必一次掌握全部证明，但需要知道每个工具在正文中的作用：对偶性用于消元，P 矩阵和 M 矩阵用于判断互联稳定，拟对角占优用于把图结构或连接强度转成可检查的代数条件。

### A.1 矩阵工具：P 矩阵、拟对角占优、M 矩阵与变换

#### A.1.1 附录使用说明

附录 A 收集第 6、8、10 章反复使用的矩阵工具。核心对象有两类：

1. **M-matrices**：对角元为正、非对角元非正，并且所有主子式为正。
2. **Quasidominant matrices**：经过正对角缩放后具有严格对角占优性质的矩阵。

这些矩阵在互联系统稳定性中出现，是因为很多稳定条件最终都要证明存在正对角矩阵  $P$ ，使：

$$PF + F^T P > 0$$

或：

$$P - A^T P A > 0.$$

正对角  $P$  代表给不同子系统不同权重；它不能任意非对角，因为非对角权重会混合子系统能量，破坏 dissipativity 参数的子系统解释。

**符号约定。** 附录中：

- 对向量  $x$ ， $x > 0$  表示每个元素都严格正。
- $x \geq 0$  表示每个元素都非负。
- 对矩阵  $A > 0$ ，表示  $A$  对称正定。

- $|A|$  表示把  $A$  每个元素取绝对值得到的矩阵。
- signature matrix 是对角矩阵，其对角元均为  $+1$  或  $-1$ 。

principal submatrix 指保留同一组行和列得到的子矩阵。principal minor 是 principal submatrix 的行列式。行列同步置换：

$$PAP$$

不会改变 principal minors 的集合，只会改变它们的排列顺序。

### A.1.2 A.1 对偶结果

本节证明一个正向量存在性的对偶定理：

$$\exists x > 0 \text{ such that } Ax > 0$$

等价于：

$$\nexists y \geq 0, y \neq 0 \text{ such that } A^T y \leq 0.$$

这类结果与 Farkas lemma/Stiemke theorem 同属“线性不等式二择一”思想。

**引理 14。** 若存在：

$$x > 0, \quad Ax > 0,$$

则不存在非零：

$$y \geq 0$$

使：

$$A^T y \leq 0.$$

证明：若  $Ax > 0$  且  $y \geq 0, y \neq 0$ ，则：

$$y^T Ax > 0.$$

因为  $Ax$  每个元素正，而  $y$  至少一个元素正。但：

$$y^T Ax = x^T A^T y.$$

若同时  $A^T y \leq 0$  且  $x > 0$ ，则：

$$x^T A^T y \leq 0.$$

矛盾。所以这样的  $y$  不存在。

**引理 15。** 反向：若不存在非零  $y \geq 0$  使  $A^T y \leq 0$ ，则存在：

$$x > 0$$

使：

$$Ax > 0.$$

原文用对  $A$  的行数归纳证明。直觉是：如果无论怎样选  $x > 0$ ，总有某一行使  $Ax$  不能全正，那么可以构造一个非负乘子  $y$ ，把这些失败的行组合起来，得到：

$$A^T y \leq 0.$$

这与假设矛盾。

**定理 58。** 两条陈述等价：

1. 存在  $x > 0$ ，使  $Ax > 0$ 。
2. 不存在非零  $y \geq 0$ ，使  $A^T y \leq 0$ 。

这个定理后面用来从“没有非负解”推出“存在正缩放向量”，是 quasidefiniteness 和 M-matrix 结果的基础。

### A.1.3 A.2 正主子式矩阵

本节研究所有 principal minors 都正的矩阵，也称 P-matrix。对称矩阵中，principal minors 全正等价于正定；非对称矩阵中情况更复杂。

**P-matrix。** 定义：一个实方阵  $A$  是 P-matrix，如果  $A$  的所有 principal minors 都严格正。这包括：

- 所有  $1 \times 1$  principal minors，即所有对角元  $a_{ii} > 0$ 。
- 所有  $2 \times 2$  principal minors。
- 一直到  $\det A > 0$ 。

**引理 16。** 若  $A$  是 P-matrix，则不等式：

$$Ax \leq 0, \quad x \geq 0$$

只有平凡解：

$$x = 0.$$

直观解释：P-matrix 的正 principal minors 排除了  $A$  把某个非负非零向量整体推到非正方向的可能。证明用归纳和  $A^{-1}$  的列。关键步骤是选  $A^{-1}$  的第一列  $b$ ，再从  $x$  中减去最大可能的  $\alpha b$ ，使一个分量变为零，从而降维到 principal submatrix。

**定理 59。** 若  $A$  是 P-matrix, 则存在:

$$x > 0$$

使:

$$Ax > 0.$$

证明: 由引理 16, 不存在非零  $y \geq 0$  使:

$$Ay \leq 0.$$

把定理 58 用在  $A^T$  或等价形式上, 即可推出存在正向量使  $Ax > 0$ 。

**定理 60。** 一个实方阵  $A$  是 P-matrix, 当且仅当对每个 signature matrix  $S$ , 存在:

$$x > 0$$

使:

$$SASx > 0.$$

注意  $SAS$  是同时改变若干行列符号。它不改变 principal minors, 因为每个 principal minor 中行列符号成对出现。充分性方向的核心思想是: 对每个符号模式都能找到正  $x$ , 说明所有可能符号扰动下仍能保持正向作用。这最终强到足以推出所有 principal minors 为正。这个定理和下一节 quasidominance 的区别非常微妙: 这里允许不同  $S$  使用不同  $x$ 。

#### A.1.4 A.3 拟对角占优矩阵

本节定义 quasidominance, 并说明它是比 P-matrix 更容易检查但更强的性质。

**定义 22。** 实方阵  $A = [a_{ij}]$  是 quasidominant, 如果存在:

$$d_i > 0$$

使对所有  $i$ :

$$d_i a_{ii} > \sum_{j \neq i} d_j |a_{ij}|.$$

这表示经过正对角缩放后, 每一行对角项严格大于非对角项绝对值和。若令:

$$D = \text{diag}(d_i),$$

则这个条件类似于  $AD^{-1}$  或相关缩放矩阵的严格对角占优。

**定理 61.**  $A$  quasidominant, 当且仅当存在同一个:

$$x > 0$$

使对每个 signature matrix  $S$ :

$$SASx > 0.$$

与定理 60 对比:

- P-matrix: 每个  $S$  可以有自己的  $x$ 。
- Quasidominant: 同一个  $x$  必须适用于所有  $S$ 。

所以:

$$\text{quasidominant} \implies \text{P-matrix},$$

但反向不一定成立。

**定理 62.** 若  $F$  quasidominant, 则存在正对角矩阵:

$$P > 0$$

使:

$$PF + F^T P > 0.$$

这就是第 6 章和第 10 章中稳定判据需要的形式。证明思路: 由 quasidominance, 存在  $x > 0$  使  $SFSx > 0$  对所有  $S$  成立。类似地, 对  $F^T$  存在  $y > 0$ 。定义:

$$P_{ii} = \frac{y_i}{x_i}.$$

则:

$$Px = y.$$

可以证明:

$$PF + F^T P$$

本身 quasidominant。因为它又是对称矩阵, 所以 principal minors 全正等价于正定, 于是:

$$PF + F^T P > 0.$$

## A.1.5 A.4 M 矩阵

本节介绍 M-matrix。它是带特殊符号模式的 P-matrix，也是检查 quasidominance 最实用的工具。

**M-matrix 定义。** 考虑实方阵  $M = [m_{ij}]$ ，满足：

$$m_{ii} > 0,$$

$$m_{ij} \leq 0 \quad (i \neq j).$$

如果  $M$  的所有 principal minors 都正，则  $M$  是 M-matrix。也就是说：

$$\text{M-matrix} = \text{P-matrix} + \text{非对角元非正符号模式}.$$

**定理 63。** 对具有 M-matrix 符号模式的矩阵  $M$ ，以下等价：

$$M \text{ 是 M-matrix}$$

和：

$$\exists x > 0 \text{ such that } Mx > 0.$$

证明要点：若  $Mx > 0$ ，则第  $i$  行：

$$m_{ii}x_i + \sum_{j \neq i} m_{ij}x_j > 0.$$

由于  $m_{ij} \leq 0$ ，移项：

$$m_{ii}x_i > \sum_{j \neq i} |m_{ij}|x_j.$$

这就是 quasidominance 条件。因此  $M$  quasidominant，进而 principal minors 全正。

**定理 64。** 对 M-matrix 符号模式矩阵：

$$M \text{ 是 M-matrix} \iff M \text{ quasidominant}.$$

因此检查 quasidominance 的常用方法是构造：

$$\tilde{A}_{ii} = A_{ii}, \quad \tilde{A}_{ij} = -|A_{ij}|, \quad i \neq j.$$

那么：

$A$  quasidominant  $\iff \tilde{A}$  是 M-matrix.

这就是第 6 章小增益判据中构造  $\hat{A}$  的原因。

**引理 17: Schur complement 保持 M-matrix.** 若 M-matrix 分块:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix},$$

其中  $m_{22}$  是标量, 则 Schur complement:

$$M_{11} - \frac{1}{m_{22}}m_{12}m_{21}$$

仍是 M-matrix. 这说明 M-matrix 对消元过程稳定, 类似正定矩阵的 Schur complement 性质。

**定理 65: M-matrix 的等价刻画.** 对非对角元非正的实方阵  $M$ , 以下等价:

1. 所有 principal minors 正。
2. 存在  $x > 0$ , 使  $Mx > 0$ 。
3. 存在  $y > 0$ , 使  $M^T y > 0$ 。
4.  $M$  非奇异, 且:

$$M^{-1} \geq 0$$

逐元素非负。第 4 条非常重要: M-matrix 的逆是非负矩阵。这在互联系统中意味着某些正输入会产生正响应, 且可用于构造正对角  $P$ 。

**引理 18.** 若:

$$A - I$$

是 M-matrix, 则:

$$I - A^{-1}$$

也是 M-matrix. 这是后面把  $A^T P A - P > 0$  和  $P - A^T P A > 0$  互相转换时用到的工具。

**引理 19 与定理 66: finite-gain 型条件.** 引理 19: 若  $A$  所有元素非负, 且:

$$I - A$$

是 M-matrix, 则存在正对角  $P$ , 使:

$$P - A^T P A > 0.$$

定理 66 去掉  $A$  非负的限制：若：

$$I - |A|$$

是 M-matrix，则存在正对角  $P$ ，使：

$$P - A^T P A > 0.$$

这正是小增益定理的矩阵版。条件  $I - |A|$  是 M-matrix 表示互联系数在绝对值意义下足够弱。

**引理 20。** 若：

$$A - I$$

是 M-matrix，则存在正对角  $P$ ，使：

$$A^T P A - P > 0.$$

它是引理 19 的对偶形式。定理 s 67 和 68 把这些结果推广到带对角矩阵  $K$  和一般界矩阵  $B$  的形式：

- 若  $K - B$  是 M-matrix，则存在  $D > 0$ ，使：

$$B^T D B < D K^2.$$

- 若  $-B$  和  $-B - K$  是 M-matrix，则存在  $D > 0$ ，使：

$$B^T D B > D K^2.$$

这些正是第 8 章定理 s 37-39 中 M-matrix 图形判据背后的代数工具。

### A.1.6 A.5 变换与等价条件

本节说明：如果一个矩阵不直接满足某个充分条件，可以通过变换把问题改写成另一种等价不等式，再尝试不同的 M-matrix/quasidominance 检查。

**Cayley transform。** 定义：

$$F = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

反过来：

$$A = (I + F)^{-1}(I - F).$$

可以证明：

$$PF + F^T P > 0$$

当且仅当：

$$P - A^T P A > 0.$$

这非常有用，因为：

- $PF + F^T P > 0$  是 passive/quasidominance 类型。
- $P - A^T P A > 0$  是 finite-gain/small-gain 类型。

如果一个测试失败，可以换到另一个等价域测试。

**更复杂不等式的简化。** 例如：

$$X^T P \Sigma X - Y^T P \Sigma Y > 0,$$

其中  $P, \Sigma$  都是对角矩阵。可以令：

$$F = \Sigma(X - Y)(X + Y)^{-1}$$

把它变成  $PF + F^T P > 0$  型。若  $\Sigma = I$  且  $X$  可逆，也可令：

$$A = YX^{-1}$$

得到  $P - A^T P A > 0$  型。附录 A 的作用是给前面稳定判据提供“可检查的矩阵充分条件”：

- P-matrix: principal minors 全正。
- Quasidominant: 可正缩放成严格对角占优；能推出存在正对角  $P$  使  $PF + F^T P > 0$ 。
- M-matrix: 非对角非正的 P-matrix; 最容易检查 quasidominance。
- Cayley transform: 把  $PF + F^T P > 0$  与  $P - A^T P A > 0$  互相转换。

这些结果解释了为什么第 6、8、10 章里频繁出现“存在正对角矩阵  $P$ ”和“M-matrix 条件”。

## 附录 B 概念辨析：我当时误解的十个问题

### B.1 耗散是长时间性质还是瞬时性质

耗散性的原始定义是任意有限时间区间上的积分账本：

$$V(t_1) - V(t_0) \leq \int_{t_0}^{t_1} w(t) dt.$$

因为区间可以任意短，所以在  $V$  可微、轨迹足够正则时，它又等价于几乎处处成立的微分形式

$$\dot{V}(t) \leq w(t).$$

因此，耗散既不是只看无限长时间，也不是要求瞬时供给率非负；它要求每个时间窗口都不能透支能量。

### B.2 供给率为负时微分不等式是否还能成立

可以。若  $w(t) < 0$ ，表示系统此刻向外输出功率。微分耗散式要求

$$\dot{V}(t) \leq w(t) < 0,$$

即储能也必须下降，并且下降得足以支付对外输出。举例： $w = -1, \dot{V} = -3$  时， $w - \dot{V} = 2 \geq 0$ ，仍然耗散；而  $w = -1, \dot{V} = -0.2$  时，系统输出的能量超过储能下降，违反耗散性。

### B.3 为什么不能从累计非负推出瞬时非负

即使对所有  $T$  有  $\int_0^T w(t) dt \geq 0$ ，也不能推出  $w(t) \geq 0$ 。原因是积分可以由正负片段相互抵消。无源电容放电时端口功率为负，但这部分能量来自此前存储，不违反能量守恒。

### B.4 外部耗散与内部耗散有什么区别

外部耗散只看零初态输入输出对；内部耗散还记录非零初始状态下的存储能量。外部条件适合黑箱输入输出模型，内部条件适合 Lyapunov 稳定证明。存储函数正是二者之间的桥梁。

## B.5 正实性为什么等价于无源性

对稳定 LTI 系统，由 Parseval 定理，时域积分

$$\int_0^T y(t)^T u(t) dt$$

可转化为频域中  $G(j\omega)$  的 Hermitian 部分。若  $G(j\omega) + G(j\omega)^H \succeq 0$ ，则每个频率成分都不产生净能量，因而时域上满足无源性。反过来，若存在某个频率方向使 Hermitian 部分为负，可构造接近该频率的输入使积分为负。

## B.6 KYP 引理到底解决什么问题

KYP 引理把频域不等式和状态空间矩阵不等式连接起来。频域形式适合测量和图形化理解；状态空间形式适合求存储函数和做控制综合。它说明同一个无源性质可以有三种等价面貌：输入输出积分不等式、频域正实性、状态空间二次储能函数。

## B.7 严格无源为什么重要

普通无源只保证系统不产生能量，但可能有纯储能振荡。严格无源在输入或输出方向多给出一部分耗散裕度，因此能排除更多边界情况，常用于推出渐近稳定。

## B.8 小增益和无源性有什么关系

小增益关注能量放大倍数，典型供给率为  $\gamma^2 u^T u - y^T y$ ；无源性关注端口功率  $u^T y$ 。二者都可以写成二次供给率，因此都是耗散理论的特例。

## B.9 为什么频域圆判据会出现圆

标量二次供给率

$$Q|G|^2 + 2S \operatorname{Re} G + R \geq 0$$

在复平面上就是关于  $G(j\omega)$  的二次不等式。配方后自然得到圆内、圆外或半平面条件。

## B.10 学习顺序建议

第一次阅读只需抓住三条主线：能量账本、存储函数、互联稳定。第二遍再读 KYP、频域判据和矩阵附录。第三遍结合电力电子端口或自己的研究对象，把供给率、端口变量和局部证书写出来。

## 参考文献与延伸阅读

1. J. C. Willems, “Dissipative dynamical systems,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1972.
2. D. J. Hill and P. J. Moylan, “The stability of nonlinear dissipative systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976.
3. P. J. Moylan and D. J. Hill, “Stability criteria for large-scale systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978.
4. P. Moylan, *Dissipative Systems and Stability*, 2014.
5. B. Brogliato, R. Lozano, B. Maschke, and O. Egeland, *Dissipative Systems Analysis and Control*, 3rd ed., Springer, 2020.
6. J. Bao and P. L. Lee, *Process Control: The Passive Systems Approach*, Springer, 2007.
7. L. Harnefors, M. Bongiorno, and S. Lundberg, “Input-admittance calculation and shaping for controlled voltage-source converters,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2007.
8. L. Harnefors, X. Wang, A. G. Yepes, and F. Blaabjerg, “Passivity-based stability assessment of grid-connected VSCs: An overview,” *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, 2016.
9. N. Pogaku, M. Prodanovic, and T. C. Green, “Modeling, analysis and testing of autonomous operation of an inverter-based microgrid,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2007.
10. P. Vorobev et al., “High-fidelity model order reduction for microgrids stability assessment,” *IEEE Transactions on Power Systems*, 2018.
11. F. Chen et al., “Limitations of using passivity index to analyze grid-inverter interactions,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2024.
12. F. Chen et al., “An extended frequency-domain passivity theory for MIMO dynamics specifications of voltage-source inverters,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2025.
13. L. Huang et al., “Gain and phase: decentralized stability conditions for power electronics-dominated power systems,” *IEEE Transactions on Power Systems*, 2024.