

# 非线性系统分析基础

第三至第六章学习笔记

香港大学王永恒

# 前言

本档内容是王永恒的学习笔记，目前就读于香港大学电机与计算机工程系，导师为刘涛教授和侯云鹤教授。初稿成于 2023 年，后于 2026 年整理。

本档整理非线性系统分析中最常用的四组工具：解的基本性质、Lyapunov 稳定性、输入-输出稳定性与无源性。它们分别回答四个问题：系统轨线是否存在并唯一；没有显式解时如何证明稳定；外部输入经过系统后输出有多大；反馈互联为什么可以通过能量不等式判断稳定。

全文按“轨线—能量—信号—端口”的顺序展开。第三章的存在唯一性、连续依赖和比较原理，为后面所有估计提供合法性；第四章的 Lyapunov 方法把稳定性转化为标量函数的下降性；第五章的输入-输出稳定性把系统看成信号算子，用范数和增益描述闭环；第六章的无源性进一步把状态能量和端口功率统一起来。为了便于自学，每章不仅给出定义、引理、命题和定理，还保留完整推导、证明细节、典型例题和自检清单。

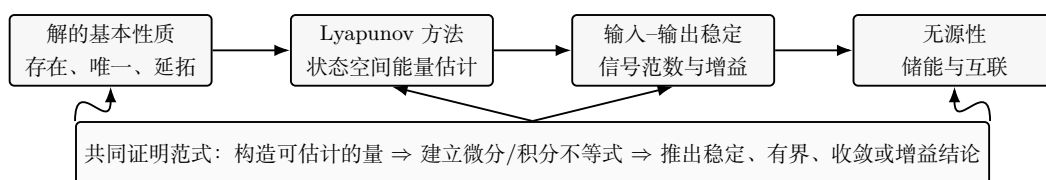


图 1 全书从轨线存在性到无源反馈稳定性的逻辑路线。

# 符号与阅读约定

---

**定义 0.1 (状态空间模型).** 状态向量记为  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , 输入记为  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ , 输出记为  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ 。一般状态空间模型写为

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad y = h(t, x, u).$$

若  $f$  不显含  $t$ , 系统称为自治系统; 否则称为非自治或时变系统。

**定义 0.2 (常用函数类).** 连续函数  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  属于  $\mathcal{K}$  类, 如果  $\alpha(0) = 0$  且严格递增; 若  $a = \infty$  且  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  当  $r \rightarrow \infty$ , 则  $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ 。函数  $\beta(r, t)$  属于  $\mathcal{KL}$  类, 如果对每个固定  $t$ ,  $\beta(\cdot, t)$  属于  $\mathcal{K}$  类; 对每个固定  $r$ ,  $\beta(r, t)$  随  $t$  单调趋于 0。

**注 0.1 (正文结构).** 每章先给出阅读主线, 再进入正式推导。定义说明对象, 假设说明定理可用条件, 引理处理技术工具, 命题给出常用推论, 定理陈述核心结论, 注说明工程含义和易错点。为保持目录清爽, 目录只列到节, 证明细节和例题以小标题穿插在正文中。

# 目录

---

前言	i
符号与阅读约定	ii
<b>第一章 从微分方程到系统轨线：解的基本性质</b>	<b>1</b>
1.1 初值问题：存在、唯一与延拓	1
1.2 连续依赖与参数扰动	25
1.3 可微性与灵敏度方程	30
1.4 比较原理	33
1.5 本章习题与训练	39
1.6 证明细节与理解补充	41
1.7 本章自检	48
<b>第二章 Lyapunov 稳定性：从局部能量到非自治估计</b>	<b>49</b>
2.1 自治系统的 Lyapunov 方法	50
2.2 不变性原理	56
2.3 线性系统与线性化	60
2.4 比较函数	65
2.5 非自治系统	69
2.6 线性时变系统与线性化	74
2.7 逆 Lyapunov 定理	78
2.8 有界性与最终有界性	81
2.9 输入到状态稳定性	85
2.10 本章习题与训练	88
2.11 证明细节与理解补充	90
2.12 本章自检	97
<b>第三章 输入-输出稳定性：范数、增益与反馈闭环</b>	<b>98</b>
3.1 信号空间与 $\mathcal{L}$ 稳定性	99
3.2 状态模型的输入-输出稳定性	108
3.3 $\mathcal{L}_2$ 增益与能量估计	117
3.4 反馈系统与小增益定理	124
3.5 本章习题与训练	128
3.6 证明细节与理解补充	132
3.7 统一观点：从范数增益到能量不等式	135
3.8 本章自检	136
<b>第四章 无源性：储能函数、正实性与反馈稳定</b>	<b>137</b>
4.1 记忆无关函数的无源性	138
4.2 状态模型与储能函数	144

4.3	正实传递函数与 KYP 引理 . . . . .	151
4.4	$\mathcal{L}_2$ 稳定性与 Lyapunov 稳定性 . . . . .	157
4.5	无源反馈定理 . . . . .	161
4.6	本章习题与训练 . . . . .	167
4.7	证明细节与理解补充 . . . . .	173
4.8	本章自检 . . . . .	179
4.9	全书最终图景 . . . . .	179
<b>参考文献</b>		<b>180</b>

# 从微分方程到系统轨线：解的基本性质

本章讨论非线性系统分析的起点：状态方程的解是否存在、是否唯一、对初值和参数是否连续依赖，以及如何用比较系统控制解的大小。后续所有稳定性结论都默认轨线是清楚定义的；因此，本章不是预备性的附属内容，而是整本书的逻辑地基。

阅读本章可以抓住一条主线。首先把微分方程写成积分方程；然后用 Lipschitz 条件保证积分算子不会产生两条不同轨线；再用 Gronwall 不等式把“误差满足积分不等式”变成“误差有显式上界”；最后通过比较原理把高维系统的估计问题转化成一维标量不等式。这样，存在唯一性、连续依赖、灵敏度方程和比较原理就不再是零散定理，而是同一套估计技术在不同场景下的表现。

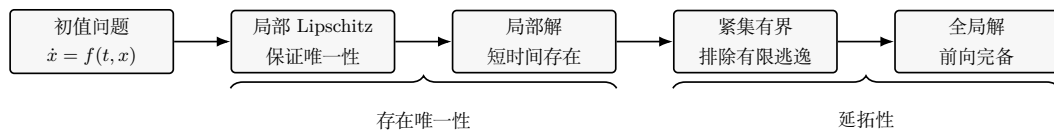


图 1.1 从局部存在唯一性到全局存在性的证明路径。

本章从微分方程的解出发，说明非线性系统分析为什么必须先处理存在性、唯一性、连续依赖与有限逃逸。只有这些基础性性质成立，后续稳定性、增益和无源性结论才有明确对象。

**定义 1.1 (解、局部 Lipschitz 与前向完备).** 设  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ 。若  $x(\cdot)$  绝对连续且满足积分方程  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ ，则称其为该初值问题的解。若  $f$  在任意紧集上对  $x$  满足统一 Lipschitz 不等式，则称  $f$  对  $x$  局部 Lipschitz。若解对所有  $t \geq t_0$  存在，则称系统前向完备。

**引理 1.1 (Gronwall 不等式).** 若非负函数  $w(t)$  满足  $w(t) \leq a + b \int_{t_0}^t w(s) ds$ ，其中  $a, b \geq 0$ ，则  $w(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$ 。该引理是连续依赖、唯一性和扰动估计的基本工具。

**定理 1.1 (局部存在唯一性).** 若  $f(t, x)$  对  $t$  分段连续，并对  $x$  局部 Lipschitz，则每个初值附近存在唯一局部解。

**命题 1.1 (延拓判据).** 若最大解的存在区间为  $[t_0, T_{\max})$  且  $T_{\max} < \infty$ ，则轨线必然离开任意紧集。因此，只要能证明轨线始终留在某个紧集内，就可排除有限逃逸。

## 1.1 初值问题：存在、唯一与延拓

### 本节核心目标

本节解决非线性状态方程最基础、也最容易被初学者忽略的三个问题：

1. **存在性**：给定初值后，解是否至少存在？
2. **唯一性**：若存在，是否只有一条轨线从这个初值出发？
3. **延拓性**：这个解能存在多久？只在短时间存在，还是对所有未来时间存在？

我们研究的初值问题是

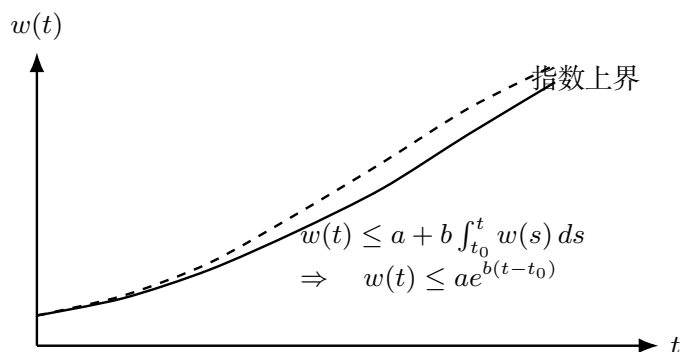


图 1.2 Gronwall 不等式把积分约束转化为指数上界。

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.1-a)$$

符号逐一解释：

- $t$ ：时间，自变量。若系统来自物理模型，单位通常是秒 s。
- $t_0$ ：初始时间。
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ：状态向量；每个分量的物理单位取决于建模对象，例如电压、电流、角度、角速度等。
- $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ：初始状态。
- $\dot{x} = dx/dt$ ：状态对时间的一阶导数。
- $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ ：向量场，即给定时间和状态时系统的速度。

控制工程里，这个问题不是纯数学洁癖。若解不唯一，同一个初始电路状态可能预测出两种电压电流轨线；若解会有限时间逃逸，仿真爆掉可能不是数值算法坏，而是模型本身允许状态在有限时间变成无穷大。

### 什么叫解

对区间  $[t_0, t_1]$ ，函数

$$x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

是初值问题 (3.1-a) 的解，至少要满足：

$$x(t_0) = x_0, \quad (3.1-b)$$

并且对区间中的时间  $t$ ，满足

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \quad (3.1-c)$$

如果  $f(t, x)$  对  $t$  和  $x$  都连续，则解  $x(t)$  通常连续可微。主教材在这里允许  $f$  对  $t$  **分段连续**，是为了容纳控制输入中的阶跃变化。例如继电器开关、数字控制器采样保持、参考输入突然改变，都可能让右端  $f(t, x)$  关于  $t$  有跳变。

在这种情况下，更稳妥的表达是积分形式：

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (3.1-d)$$

为什么 (3.1-d) 等价于微分方程？一步一步看：

1. 若  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ , 对两边从  $t_0$  到  $t$  积分:

$$\int_{t_0}^t \dot{x}(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

2. 微积分基本定理给出

$$\int_{t_0}^t \dot{x}(s) ds = x(t) - x(t_0).$$

3. 用初值  $x(t_0) = x_0$ :

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

4. 两边加  $x_0$ , 得到

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

这就是 (3.1-d)。

**连续为什么不够保证唯一**

书中给出标量例子:

$$\dot{x} = x^{1/3}, \quad x(0) = 0. \quad (3.1-e)$$

这里  $x \in \mathbb{R}$ , 所以状态是一维的。右端函数是

$$f(x) = x^{1/3}.$$

它在  $x = 0$  连续, 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/3} = 0 = f(0).$$

但是这个初值问题不唯一。一个解是

$$x_1(t) \equiv 0. \quad (3.1-f)$$

验证:

$$\dot{x}_1(t) = 0,$$

而

$$x_1(t)^{1/3} = 0^{1/3} = 0.$$

所以

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)^{1/3}.$$

另一个解是

$$x_2(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2}, \quad t \geq 0. \quad (3.1-g)$$

逐步验证它也是解。令

$$q(t) = \frac{2t}{3}.$$

那么

$$x_2(t) = q(t)^{3/2}.$$

先求  $q(t)$  的导数：

$$\dot{q}(t) = \frac{2}{3}.$$

对  $x_2(t) = q(t)^{3/2}$  用链式法则：

$$\dot{x}_2(t) = \frac{3}{2}q(t)^{1/2}\dot{q}(t).$$

代入  $\dot{q}(t) = 2/3$ ：

$$\dot{x}_2(t) = \frac{3}{2}q(t)^{1/2} \cdot \frac{2}{3}.$$

数值系数相乘：

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 1.$$

所以

$$\dot{x}_2(t) = q(t)^{1/2} = \left(\frac{2t}{3}\right)^{1/2}. \quad (3.1-h)$$

再计算  $x_2(t)^{1/3}$ ：

$$x_2(t)^{1/3} = \left[ \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2} \right]^{1/3}.$$

幂的幂法则：

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

这里  $r = 3/2$ ,  $s = 1/3$ , 所以

$$rs = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

因此

$$x_2(t)^{1/3} = \left(\frac{2t}{3}\right)^{1/2}. \quad (3.1-i)$$

比较 (3.1-h) 与 (3.1-i):

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)^{1/3}.$$

并且

$$x_2(0) = \left(\frac{2 \cdot 0}{3}\right)^{3/2} = 0.$$

所以  $x_2(t)$  也满足同一个初值问题。更进一步，其实还有无限多解。对任意等待时间  $a \geq 0$ ，定义

$$x_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a, \\ \left(\frac{2(t-a)}{3}\right)^{3/2}, & t > a. \end{cases} \quad (3.1-j)$$

它表示轨线先在原点停到时间  $a$ ，再离开原点。这个例子告诉我们：**右端连续只够保证存在性，通常不够保证唯一性。**

唯一性失败的根源是  $f(x) = x^{1/3}$  在  $x = 0$  附近太尖。计算导数：

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \quad x \neq 0.$$

当  $x \rightarrow 0$  时，

$$|f'(x)| = \frac{1}{3}|x|^{-2/3} \rightarrow \infty.$$

也就是说，图像在原点附近斜率无界。接下来 Lipschitz 条件正是为了排除这种“无限陡”的行为。

### Lipschitz 条件：唯一性的关键

主教材使用的 Lipschitz 条件是：

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|. \quad (3.1-k)$$

这里：

- $x, y \in \mathbb{R}^n$ ：两个状态点。
- $\|\cdot\|$ ：向量范数，例如 2-范数、1-范数、无穷范数等。
- $L > 0$ ：Lipschitz 常数，量化向量场对状态变化的敏感程度。

对于一维函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，若  $x \neq y$ ，将 (3.1-k) 两边除以  $|x - y|$ ，得到

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L. \quad (3.1-l)$$

左边是连接  $(x, f(x))$  与  $(y, f(y))$  的割线斜率绝对值。因此一维 Lipschitz 条件的几何意义是：

图像上任意两点之间的割线斜率绝对值都有统一上界。

若某点附近斜率趋于无穷大，函数就不可能在该点局部 Lipschitz。

**Theorem 3.1: 局部存在唯一性**

定理的内容是：若  $f(t, x)$  对  $t$  分段连续，并且在闭球

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\} \quad (3.1-m)$$

上对  $x$  满足 Lipschitz 条件

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in B, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (3.1-n)$$

则存在某个  $\delta > 0$ ，使初值问题

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

在短时间区间

$$[t_0, t_0 + \delta]$$

上有唯一解。注意这个定理的三个重点：

1. **局部**：只保证到  $t_0 + \delta$ ， $\delta$  不一定大。
2. **唯一**：同一初值只能产生一条轨线。
3. **条件是充分条件**：不满足 Lipschitz 不代表一定没有唯一解，但 Lipschitz 是常用且好检查的保证。

定理背后的机制：为什么 Lipschitz 带来唯一性

原教材把证明放在 Appendix C.1，这里讲核心机制。假设  $x(t)$  和  $y(t)$  是同一个初值  $x_0$  出发的两个解。由积分形式：

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

两式相减：

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds.$$

取范数：

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds.$$

用 Lipschitz 条件：

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \int_{t_0}^t L\|x(s) - y(s)\| ds. \quad (3.1-o)$$

令

$$w(t) = \|x(t) - y(t)\|.$$

则

$$w(t) \leq L \int_{t_0}^t w(s) ds.$$

由 Gronwall 型结论可知  $w(t) = 0$ 。因此

$$\|x(t) - y(t)\| = 0,$$

即

$$x(t) = y(t).$$

这解释了 Lipschitz 条件为什么防止两条轨线从同一点分叉。存在性部分可用 contraction mapping 证明：把求解微分方程转化为寻找积分算子的固定点

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

再在足够短的时间区间上证明  $T$  是压缩映射。时间区间要足够短，正是因为需要让类似  $L\delta < 1$  的量成立。

### 局部 Lipschitz、集合 Lipschitz、全局 Lipschitz

主教材接着区分三个概念。**局部 Lipschitz**：函数  $f(x)$  在域  $D \subset \mathbb{R}^n$  上局部 Lipschitz，意思是对每个点  $x^* \in D$ ，都能找到一个小邻域  $D_0$ ，使  $f$  在  $D_0$  上满足 Lipschitz 条件。这里 Lipschitz 常数可以随点和邻域变化。**在集合  $W$  上 Lipschitz**：存在一个统一常数  $L$ ，使所有  $x, y \in W$  都满足

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

**全局 Lipschitz**：在整个  $\mathbb{R}^n$  上 Lipschitz。这三者的强弱关系是：

$$\text{全局 Lipschitz} \Rightarrow \text{在任意集合上 Lipschitz} \Rightarrow \text{局部 Lipschitz}.$$

反过来一般不成立。工程直觉：

- 局部 Lipschitz 是“模型局部足够光滑”。
- 全局 Lipschitz 是“模型在所有状态范围内增长斜率都受统一限制”。

很多物理系统局部 Lipschitz，但不全局 Lipschitz。例如含  $x^3$ 、 $\sin x$ 、多项式耦合项的模型，通常在紧集上没问题，但全空间的 Jacobian 可能无界。

### 用导数/Jacobian 检查 Lipschitz

一维情形

如果  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  可微，且在区间  $I$  上

$$|f'(x)| \leq k, \quad x \in I, \quad (3.1-p)$$

那么  $f$  在  $I$  上 Lipschitz，常数可取  $L = k$ 。证明逐步写：对任意  $x, y \in I$ ，不妨  $x \neq y$ 。由一维中值定理，存在  $\xi$  在  $x$  与  $y$  之间，使

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x).$$

取绝对值：

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| |y - x|.$$

用导数上界:

$$|f'(\xi)| \leq k.$$

所以

$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

这就是 Lipschitz 条件。

多维情形: *Lemma 3.1*

*Lemma 3.1* 的设定:

$$f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

其中  $D \subset \mathbb{R}^n$ 。若 Jacobian

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$$

存在且连续, 并且在凸集  $W \subset D$  上满足

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq L, \quad t \in [a, b], x \in W, \quad (3.1-q)$$

则

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in W. \quad (3.1-r)$$

这里  $\partial f / \partial x$  是  $m \times n$  Jacobian 矩阵。如果

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

*Lemma 3.1* 的逐步证明思路

固定  $t \in [a, b]$ , 固定  $x, y \in W$ 。因为  $W$  是凸集, 连接  $x$  和  $y$  的线段完全在  $W$  内。定义线段参数化:

$$\gamma(s) = (1 - s)x + sy, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (3.1-s)$$

检查端点:

$$\gamma(0) = (1 - 0)x + 0y = x,$$

$$\gamma(1) = (1 - 1)x + 1y = y.$$

求导：

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d}{ds}[(1 - s)x + sy].$$

因为  $x, y$  是常向量，

$$\frac{d}{ds}[(1 - s)x] = -x,$$

$$\frac{d}{ds}[sy] = y.$$

所以

$$\frac{d\gamma}{ds} = y - x. \quad (3.1-t)$$

现在看复合函数

$$F(s) = f(t, \gamma(s)).$$

由链式法则：

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s)) \frac{d\gamma}{ds}.$$

代入 (3.1-t)：

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s))(y - x). \quad (3.1-u)$$

由微积分基本定理：

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 \frac{dF}{ds} ds.$$

把  $F(1) = f(t, y)$ ,  $F(0) = f(t, x)$  代入：

$$f(t, y) - f(t, x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s))(y - x) ds. \quad (3.1-v)$$

取范数：

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| = \left\| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s))(y - x) ds \right\|.$$

由积分范数不等式：

$$\left\| \int_0^1 h(s) ds \right\| \leq \int_0^1 \|h(s)\| ds.$$

所以

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s))(y - x) \right\| ds.$$

由 induced matrix norm 的定义：

$$\|Av\| \leq \|A\| \|v\|.$$

令

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s)), \quad v = y - x,$$

得到

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s))(y - x) \right\| \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s)) \right\| \|y - x\|.$$

由 (3.1-q)：

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s)) \right\| \leq L.$$

因此

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq \int_0^1 L \|y - x\| ds.$$

因为  $L\|y - x\|$  与  $s$  无关：

$$\int_0^1 L \|y - x\| ds = L \|y - x\| \int_0^1 ds = L \|y - x\|.$$

于是

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq L \|y - x\|.$$

这就是 Lemma 3.1 的核心结论。

### Lemma 3.2: 连续可微推出局部 Lipschitz

Lemma 3.2 说：若  $f(t, x)$  和  $\partial f/\partial x$  在  $[a, b] \times D$  上连续，则  $f$  在  $[a, b] \times D$  上对  $x$  局部 Lipschitz。逐步理解：

1. 任取  $x^* \in D$ 。
2. 因为  $D$  是开域，可找半径  $r > 0$ ，使闭球

$$D_0 = \{x : \|x - x^*\| \leq r\}$$

包含在  $D$  内。

3. 集合  $[a, b] \times D_0$  是紧集，因为  $[a, b]$  闭有界， $D_0$  闭有界。
4. Jacobian 连续函数在紧集上有界，所以存在  $L_0$ ，使

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq L_0, \quad (t, x) \in [a, b] \times D_0.$$

5. 由 Lemma 3.1,  $f$  在  $[a, b] \times D_0$  上 Lipschitz.

6. 因为每个点  $x^*$  都有这样的邻域, 所以  $f$  局部 Lipschitz.

### Lemma 3.3: 全局 Lipschitz 与 Jacobian 全局有界

Lemma 3.3 说, 在  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  上, 如果  $f$  和  $\partial f/\partial x$  连续, 那么:

$$f \text{ 全局 Lipschitz} \iff \frac{\partial f}{\partial x} \text{ 全局一致有界.}$$

“ $\Leftarrow$ ”方向由 Lemma 3.1 得到, 因为整个  $\mathbb{R}^n$  是凸集。“ $\Rightarrow$ ”方向可以这样直觉理解: 若  $f$  全局 Lipschitz, 则任意方向上的差商都有界。令  $y = x + hv$ , 其中  $\|v\| = 1$ , 则

$$\frac{\|f(t, x + hv) - f(t, x)\|}{|h|} \leq L.$$

令  $h \rightarrow 0$ , 得到方向导数有界:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)v \right\| \leq L.$$

对所有单位向量  $v$  取上确界, 就得到 induced norm 有界:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq L.$$

### Example 3.1: 连续可微但不全局 Lipschitz

该例的关键用途是说明: 该函数在  $\mathbb{R}^2$  上连续可微, 所以它局部 Lipschitz; 但它的 Jacobian 包含随  $x_1, x_2$  增长的项, 因此 Jacobian 在整个  $\mathbb{R}^2$  上无界, 所以它不全局 Lipschitz。原文给出的 Jacobian 结构可读为类似

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{bmatrix}. \quad (3.1-w)$$

在矩形集合

$$W = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq a_1, |x_2| \leq a_2\} \quad (3.1-x)$$

上, 使用无穷范数的 induced matrix norm。对矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

无穷范数诱导矩阵范数为最大行绝对值和:

$$\|A\|_\infty = \max\{|a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}|\}. \quad (3.1-y)$$

对 (3.1-w), 第一行绝对值和为

$$|-1 + x_2| + |x_1|.$$

逐步上界：

$$|-1 + x_2| = |x_2 - 1| \leq |x_2| + |-1| = |x_2| + 1.$$

在  $W$  上,

$$|x_2| \leq a_2, \quad |x_1| \leq a_1.$$

所以

$$|-1 + x_2| + |x_1| \leq (|x_2| + 1) + |x_1| \leq a_2 + 1 + a_1.$$

第二行绝对值和为

$$|-x_2| + |1 - x_1|.$$

因为

$$|-x_2| = |x_2| \leq a_2,$$

且

$$|1 - x_1| \leq |1| + |x_1| = 1 + |x_1| \leq 1 + a_1,$$

所以

$$|-x_2| + |1 - x_1| \leq a_2 + 1 + a_1.$$

因此

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{\infty} \leq 1 + a_1 + a_2.$$

由 Lemma 3.1, Lipschitz 常数可取

$$L = 1 + a_1 + a_2.$$

这一步的关键不是具体函数，而是方法：

在有界矩形  $W$  上, Jacobian 的每一项都有界，因此函数在  $W$  上 Lipschitz。

但若  $x_1, x_2$  可以任意大，则上界  $1 + a_1 + a_2$  也会任意大，不存在全局统一  $L$ 。因此函数不全局 Lipschitz。

### Example 3.2: 不可连续可微但仍 Lipschitz

这个例子的系统可由上下文恢复为

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\text{sat}(x_1 + x_2) \end{bmatrix}. \quad (3.1-z)$$

这里  $\text{sat}(\cdot)$  是饱和函数。它在折点处不可微，因此  $f$  不是连续可微函数。但是饱和函数满足一个非常重要的性质：

$$|\text{sat}(\eta) - \text{sat}(\xi)| \leq |\eta - \xi|. \quad (3.1\text{-aa})$$

这表示饱和函数是 1-Lipschitz 的。令

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

先计算  $f(x) - f(y)$ ：

$$f(x) - f(y) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\text{sat}(x_1 + x_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_2 \\ -\text{sat}(y_1 + y_2) \end{bmatrix}.$$

逐分量相减：

$$f(x) - f(y) = \begin{bmatrix} x_2 - y_2 \\ -\text{sat}(x_1 + x_2) + \text{sat}(y_1 + y_2) \end{bmatrix}.$$

第二个分量的符号不影响平方，所以 2-范数平方为

$$\|f(x) - f(y)\|_2^2 = (x_2 - y_2)^2 + [\text{sat}(x_1 + x_2) - \text{sat}(y_1 + y_2)]^2. \quad (3.1\text{-ab})$$

用饱和函数的 1-Lipschitz 性质 (3.1-aa)，其中

$$\eta = x_1 + x_2, \quad \xi = y_1 + y_2.$$

于是

$$|\text{sat}(x_1 + x_2) - \text{sat}(y_1 + y_2)| \leq |(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)|.$$

括号展开：

$$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2).$$

令

$$a = x_1 - y_1, \quad b = x_2 - y_2.$$

那么 (3.1-ab) 给出

$$\|f(x) - f(y)\|_2^2 \leq b^2 + (a + b)^2. \quad (3.1\text{-ac})$$

展开  $(a + b)^2$ ：

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

代回：

$$b^2 + (a + b)^2 = b^2 + a^2 + 2ab + b^2.$$

合并同类项：

$$b^2 + b^2 = 2b^2.$$

所以

$$b^2 + (a + b)^2 = a^2 + 2ab + 2b^2. \quad (3.1-ad)$$

矩阵形式为

$$a^2 + 2ab + 2b^2 = [a \ b] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (3.1-ae)$$

设

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

对对称矩阵  $P$ ，有标准不等式

$$z^T P z \leq \lambda_{\max}(P) z^T z, \quad (3.1-af)$$

其中  $z = [a, b]^T$ ， $\lambda_{\max}(P)$  是最大特征值。计算  $P$  的特征值。特征方程：

$$\det(P - \lambda I) = 0.$$

先写

$$P - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}.$$

行列式：

$$\det(P - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 \cdot 1.$$

展开：

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-\lambda) + (-\lambda) \cdot 2 + (-\lambda)(-\lambda).$$

逐项得到：

$$= 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 = 2 - 3\lambda + \lambda^2.$$

再减去 1：

$$\det(P - \lambda I) = (2 - 3\lambda + \lambda^2) - 1 = 1 - 3\lambda + \lambda^2.$$

所以

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0.$$

用二次公式：

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

因此

$$\lambda_{\max}(P) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

由 (3.1-ac)-(3.1-af):

$$\|f(x) - f(y)\|_2^2 \leq \lambda_{\max}(P)(a^2 + b^2).$$

注意

$$a^2 + b^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = \|x - y\|_2^2.$$

所以

$$\|f(x) - f(y)\|_2^2 \leq \lambda_{\max}(P)\|x - y\|_2^2.$$

两边开平方:

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \sqrt{\lambda_{\max}(P)}\|x - y\|_2.$$

也就是

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}\|x - y\|_2. \quad (3.1-ag)$$

因此可取一个 Lipschitz 常数

$$L = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}.$$

书中还指出可以用更保守的不等式得到更简单但更大的常数。因为

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

来自

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

把它改写:

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

代入 (3.1-ad):

$$a^2 + 2ab + 2b^2 \leq a^2 + (a^2 + b^2) + 2b^2.$$

合并:

$$= 2a^2 + 3b^2.$$

又因为

$$2a^2 \leq 3a^2,$$

所以

$$2a^2 + 3b^2 \leq 3a^2 + 3b^2 = 3(a^2 + b^2).$$

因此

$$\|f(x) - f(y)\|_2^2 \leq 3\|x - y\|_2^2.$$

开平方：

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \sqrt{3}\|x - y\|_2. \quad (3.1-ah)$$

所以也可取

$$L = \sqrt{3}.$$

这个例子非常重要，因为它说明：

连续可微  $\Rightarrow$  局部 Lipschitz，但 Lipschitz 不要求连续可微。

饱和、死区、继电器等工程非线性经常不可微，但仍可能 Lipschitz 或分段 Lipschitz。

### 范数选择不改变 Lipschitz 性质

在有限维空间  $\mathbb{R}^n$  中，所有  $p$ -范数等价。意思是：若  $\|\cdot\|_\alpha$  与  $\|\cdot\|_\beta$  是两个范数，则存在常数  $c_1, c_2 > 0$ ，使

$$c_1\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2\|x\|_\alpha.$$

因此，一个函数是否 Lipschitz 不依赖具体选哪个范数；但 Lipschitz 常数  $L$  的数值会变。

这就是为什么书中 Example 3.1 用  $\|\cdot\|_\infty$ ，Example 3.2 用  $\|\cdot\|_2$ ，都合理。

### 从局部解到最大存在区间

Theorem 3.1 只给出短时间区间

$$[t_0, t_0 + \delta].$$

如果想继续往后求解，可以把

$$t_0 + \delta$$

当作新的初始时间，把

$$x(t_0 + \delta)$$

当作新的初始状态，再次应用 Theorem 3.1。若条件仍满足，就可延拓到

$$[t_0 + \delta, t_0 + \delta + \delta_2].$$

把两段解拼起来，就得到

$$[t_0, t_0 + \delta + \delta_2]$$

上的唯一解。这个过程可以不断重复，但不一定能无限重复下去。最终得到最大存在区间

$$[t_0, T).$$

若  $T < \infty$ ，通常意味着当  $t \rightarrow T^-$  时，轨线离开任何能保证 Lipschitz 的紧集。常见表现是状态范数趋于无穷大。

### Example 3.3: 有限逃逸时间

考虑

$$\dot{x} = -x^2, \quad x(0) = -1. \quad (3.1\text{-ai})$$

右端

$$f(x) = -x^2$$

在  $\mathbb{R}$  上连续可微，所以局部 Lipschitz。因此局部唯一解存在。我们显式求解。从

$$\frac{dx}{dt} = -x^2$$

开始。只要  $x \neq 0$ ，两边除以  $x^2$ ：

$$\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt} = -1.$$

写成微分形式：

$$x^{-2} dx = -dt.$$

两边积分：

$$\int x^{-2} dx = \int -1 dt.$$

左边：

$$\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}.$$

右边：

$$\int -1 dt = -t + C.$$

所以

$$-\frac{1}{x} = -t + C.$$

两边乘以  $-1$ ：

$$\frac{1}{x} = t - C.$$

令新的常数  $C_1 = -C$ ，也可写成

$$\frac{1}{x} = t + C_1.$$

用初值  $x(0) = -1$ ：

$$\frac{1}{x(0)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

代入  $t = 0$ ：

$$-1 = 0 + C_1.$$

所以

$$C_1 = -1.$$

因此

$$\frac{1}{x} = t - 1.$$

取倒数：

$$x(t) = \frac{1}{t - 1}. \quad (3.1-aj)$$

这个解在  $t = 1$  不定义。当  $t \rightarrow 1^-$ ：

$$t - 1 \rightarrow 0^-,$$

所以

$$\frac{1}{t - 1} \rightarrow -\infty.$$

因此解只存在于

$$[0, 1)$$

上，并且在有限时间  $t = 1$  逃逸到无穷大。这就是 finite escape time。

为什么这不是线性系统会发生的事  
线性不稳定系统如

$$\dot{x} = x$$

的解是

$$x(t) = x(0)e^t.$$

它随  $t \rightarrow \infty$  发散，但任意有限  $t$  都有限。非线性系统因为增长率可能像  $x^2$ 、 $x^3$  那样随状态增大而加速，可能在有限时间达到无穷大。

**Theorem 3.2: 全局存在唯一性, 全局 Lipschitz 版本**

Theorem 3.2 说: 若  $f(t, x)$  对  $t$  分段连续, 并且在整个  $\mathbb{R}^n$  上对  $x$  满足统一 Lipschitz 条件

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (3.1-ak)$$

则初值问题在整个  $[t_0, t_1]$  上有唯一解。由于  $t_1$  可以任意大, 如果对每个有限区间都能找到合适条件, 就能得到所有未来时间上的解。

**Example 3.4: 线性系统不会有限逃逸**

考虑线性时变系统

$$\dot{x} = A(t)x + g(t). \quad (3.1-al)$$

这里:

- $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是时变矩阵。
- $g(t) \in \mathbb{R}^n$  是外加项。

定义

$$f(t, x) = A(t)x + g(t).$$

对两个状态  $x, y$ , 计算:

$$f(t, x) - f(t, y) = [A(t)x + g(t)] - [A(t)y + g(t)].$$

展开括号:

$$= A(t)x + g(t) - A(t)y - g(t).$$

$g(t)$  与  $-g(t)$  抵消:

$$= A(t)x - A(t)y.$$

提取  $A(t)$ :

$$= A(t)(x - y).$$

取范数:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|A(t)(x - y)\|.$$

由 induced matrix norm:

$$\|A(t)(x - y)\| \leq \|A(t)\| \|x - y\|.$$

在有限时间区间  $[t_0, t_1]$  上, 若  $A(t)$  分段连续, 则  $\|A(t)\|$  有界。设

$$\|A(t)\| \leq a, \quad t \in [t_0, t_1].$$

于是

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq a\|x - y\|.$$

所以  $f$  在  $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$  上全局 Lipschitz。由 Theorem 3.2, 线性系统在整个  $[t_0, t_1]$  上有唯一解。因为  $t_1$  任意, 线性系统不会有限逃逸。

### 全局 Lipschitz 很保守

全局 Lipschitz 是强条件, 很多非线性系统不满足, 但仍然有全局解。

**Example 3.5:**  $\dot{x} = -x^3$  不全局 Lipschitz, 但全局存在系统:

$$\dot{x} = -x^3. \quad (3.1\text{-am})$$

右端函数:

$$f(x) = -x^3.$$

求导:

$$f'(x) = -3x^2.$$

当  $|x| \rightarrow \infty$  时,

$$|f'(x)| = 3x^2 \rightarrow \infty.$$

所以  $f$  不全局 Lipschitz。但我们可以显式求解。方程为

$$\frac{dx}{dt} = -x^3.$$

若  $x \neq 0$ , 两边除以  $x^3$ :

$$x^{-3} \frac{dx}{dt} = -1.$$

写成微分形式:

$$x^{-3} dx = -dt.$$

积分:

$$\int x^{-3} dx = \int -1 dt.$$

左边:

$$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2}x^{-2}.$$

右边:

$$\int -1 dt = -t + C.$$

所以

$$-\frac{1}{2}x^{-2} = -t + C.$$

两边乘以  $-2$ :

$$x^{-2} = 2t + C_2,$$

其中  $C_2$  是常数。若初始时间为  $t_0$ , 初始状态为  $x(t_0) = x_0 \neq 0$ , 代入:

$$x_0^{-2} = 2t_0 + C_2.$$

所以

$$C_2 = x_0^{-2} - 2t_0.$$

代回:

$$x^{-2} = 2t + x_0^{-2} - 2t_0.$$

合并:

$$x^{-2} = x_0^{-2} + 2(t - t_0). \quad (3.1-an)$$

两边取倒数:

$$x^2 = \frac{1}{x_0^{-2} + 2(t - t_0)}.$$

把分母中的  $x_0^{-2}$  写为  $1/x_0^2$ :

$$x^2 = \frac{1}{\frac{1}{x_0^2} + 2(t - t_0)}.$$

通分:

$$\frac{1}{x_0^2} + 2(t - t_0) = \frac{1 + 2x_0^2(t - t_0)}{x_0^2}.$$

所以

$$x^2 = \frac{1}{\frac{1+2x_0^2(t-t_0)}{x_0^2}} = \frac{x_0^2}{1 + 2x_0^2(t - t_0)}.$$

取平方根, 并保留初始符号:

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2(t - t_0)}}. \quad (3.1-ao)$$

若  $x_0 = 0$ , 解为  $x(t) \equiv 0$ , 也符合公式的极限理解。对  $t \geq t_0$ , 分母

$$1 + 2x_0^2(t - t_0) \geq 1.$$

因此不会为零, 解对所有  $t \geq t_0$  存在。这个例子说明:

不全局 Lipschitz 不等于会有限逃逸。

**Theorem 3.3: 局部 Lipschitz 加紧集约束也能全局存在**

Theorem 3.3 是这一节与 Lyapunov 理论连接最紧密的结论。定理说：若  $f(t, x)$  对  $t$  分段连续，对  $x$  局部 Lipschitz；若存在紧集  $W \subset D$ ，初始状态  $x_0 \in W$ ，并且已知每条从  $x_0$  出发的解都始终留在  $W$  内，则唯一解对所有

$$t \geq t_0$$

存在。逐步理解证明：

1. 局部 Lipschitz 给出局部唯一解，因此存在最大存在区间

$$[t_0, T).$$

2. 若  $T < \infty$ ，最大解无法继续延拓。第 3.1 前面的讨论和 Exercise 3.26 表明：这时解必须离开  $D$  内任意紧集。
3. 但题设说解一直留在紧集  $W \subset D$  中。
4. 这与“若  $T < \infty$  就必须离开任何紧集”矛盾。
5. 因此  $T$  不可能有限，只能是

$$T = \infty.$$

所以解全局存在。这个定理的实用价值在于：我们不需要全局 Lipschitz，只要能证明轨线被困在某个紧集里即可。第 4 章 Lyapunov 方法常常就是用来证明这件事。

**Example 3.6: 不用求解也证明  $\dot{x} = -x^3$  全局存在**

系统：

$$\dot{x} = -x^3.$$

右端局部 Lipschitz，因为  $f'(x) = -3x^2$  在任意有界区间上有界。现在不求显式解，只看方向。若  $x(t) > 0$ ，则

$$x^3(t) > 0,$$

所以

$$\dot{x}(t) = -x^3(t) < 0.$$

状态往左移动，即朝原点方向移动。若  $x(t) < 0$ ，则

$$x^3(t) < 0,$$

所以

$$\dot{x}(t) = -x^3(t) > 0.$$

状态往右移动，也朝原点方向移动。因此从  $x(0) = a$  出发：

- 若  $a > 0$ ，状态不会超过  $a$ ，也不会穿过原点后跑到小于  $-a$ 。
- 若  $a < 0$ ，状态不会小于  $a$ ，也不会跑到大于  $|a|$ 。
- 若  $a = 0$ ，状态保持 0。

所以轨线始终留在紧集

$$W = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq |a|\} = [-|a|, |a|].$$

由 Theorem 3.3, 解对所有  $t \geq 0$  存在且唯一。

### 本节结构总结

本节可以压缩成一张逻辑表：

条件	结论	局限
$f$ 连续	至少存在解	不保证唯一
$f$ 局部 Lipschitz	局部唯一解	不保证全局存在
$f$ 全局 Lipschitz	任意有限区间唯一解	条件很强
$f$ 局部 Lipschitz + 解留在紧集	全局唯一解	需要证明紧集约束

### 关键易错点提醒

1. **连续不等于 Lipschitz**:  $x^{1/3}$  连续, 但在 0 处不局部 Lipschitz。
2. **局部 Lipschitz 不等于全局 Lipschitz**:  $-x^3$  局部 Lipschitz, 但不全局 Lipschitz。
3. **不全局 Lipschitz 不等于有限逃逸**:  $-x^3$  不全局 Lipschitz, 但全局存在。
4. **有限逃逸是非线性现象**: 线性系统在有限时间内不会逃逸到无穷大。
5. **紧集约束非常重要**: 第 4 章的 Lyapunov 子水平集就是为了制造这样的紧集。

### 电气工程/控制工程应用实例

考虑一个含饱和放大器的简单状态模型：

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\text{sat}(x_1 + x_2).$$

饱和函数不可处处可微, 但它是 Lipschitz 的。因此系统仍可有唯一解。这对工程很重要: 实际执行器饱和、运放饱和、电机电流限制等非线性不光滑, 但并不必然破坏解的唯一性。再考虑带二次增长的模型：

$$\dot{x} = x^2.$$

若  $x(0) > 0$ , 显式解为

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 - x(0)t},$$

会在

$$t = \frac{1}{x(0)}$$

有限逃逸。这提醒我们: 当模型右端随状态增长太快, 并且方向又把状态推向更大值时, 有限时间爆炸是可能的。做非线性控制设计时, 不能只看局部光滑, 还要看轨线是否能被某种能量函数困住。

### 推导补充

这一节最容易被误解成“只要右端函数连续，解就存在唯一”。正确逻辑要分开三层：存在、唯一、能延续多久。存在需要连续性配合局部构造；唯一需要 Lipschitz；能否延续到任意长时间还要排除有限逃逸。先把微分方程

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

改写成积分方程：

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

这个改写很关键，因为固定点证明不是直接在微分方程上做，而是在函数空间里找一个函数  $x(\cdot)$ ，使它经过积分算子后仍等于自己。定义算子

$$(\Phi x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

如果  $x = \Phi x$ ，那么  $x$  就是解。接下来要证明  $\Phi$  有唯一固定点。取一个状态球

$$B_r(x_0) = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$$

和一个时间区间  $[t_0, t_0 + h]$ 。若在这个矩形区域内

$$\|f(t, x)\| \leq M,$$

那么对任意留在球内的函数  $x(\cdot)$ ，有

$$\|(\Phi x)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\|.$$

用积分范数不等式：

$$\left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \leq \int_{t_0}^t M ds.$$

计算最后的积分：

$$\int_{t_0}^t M ds = M(t - t_0) \leq Mh.$$

若选  $h \leq r/M$ ，则

$$\|(\Phi x)(t) - x_0\| \leq r.$$

这说明  $\Phi$  把球内函数仍映到球内函数。下面看唯一性。若  $f$  对  $x$  满足 Lipschitz 条件：

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|,$$

那么

$$\|(\Phi x)(t) - (\Phi y)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right\|.$$

一步一步放大：

$$\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \leq \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\| ds.$$

如果用函数空间的上确界范数

$$\|x - y\|_{\infty} = \sup_{s \in [t_0, t_0+h]} \|x(s) - y(s)\|,$$

则

$$\int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\| ds \leq \int_{t_0}^t L \|x - y\|_{\infty} ds = L(t - t_0) \|x - y\|_{\infty} \leq Lh \|x - y\|_{\infty}.$$

于是

$$\|\Phi x - \Phi y\|_{\infty} \leq Lh \|x - y\|_{\infty}.$$

若再选  $h < 1/L$ ,  $\Phi$  就是压缩映射。压缩映射只有一个固定点, 所以局部解唯一。这一推导解释了三个常数的作用:  $M$  控制轨线短时间内不会冲出球;  $L$  控制两条轨线不会分叉;  $h$  必须足够小, 使这两个控制同时成立。有限逃逸时间可以这样理解。如果只知道局部 Lipschitz, 那么只要解留在某个紧集内, 就能继续延拓。若最大存在区间右端是有限的  $T < \infty$ , 却不能再延拓, 那只能说明当  $t \rightarrow T^-$  时轨线不再留在任何紧集内。直观地说, 状态必须逃向无穷远, 或者撞到定义域边界。本节学习检查: 你应该能从积分方程推出压缩映射不等式  $\|\Phi x - \Phi y\|_{\infty} \leq Lh \|x - y\|_{\infty}$ , 并能解释为什么连续性、Lipschitz 性、全局存在是三个不同层次的条件。

## 1.2 连续依赖与参数扰动

### 本节核心目标

本节研究解对初始状态和参数的连续依赖。控制工程里, 没有任何模型参数和初始状态是绝对精确的。如果一个模型的解对微小误差极端不连续, 那么这个模型即便存在唯一解, 也很难用于工程预测。本节要证明的直觉是: 如果向量场  $f$  对状态足够规则, 那么在有限时间区间上, 初值或参数的小变化只会造成解的小变化。

### 解的积分表达式

状态方程

$$\dot{x} = f(t, x)$$

的解满足

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

这个公式解释了为什么初始时间  $t_0$  的连续依赖相对直观: 改变积分下限, 只会改变一小段积分贡献。书中把重点放在初始状态  $x_0$  与参数  $\lambda$  上。

**对初始状态连续依赖是什么意思**

设  $y(t)$  是从  $y(t_0) = y_0$  出发的解。如果对任意  $\varepsilon > 0$ ，都存在  $\delta > 0$ ，使得只要

$$\|z_0 - y_0\| < \delta,$$

从  $z_0$  出发的解  $z(t)$  在同一时间区间  $[t_0, t_1]$  上存在，并且

$$\|z(t) - y(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1],$$

则称解对初值连续依赖。注意这里强调“同一时间区间”。如果扰动后的解在  $t_1$  前有限逃逸，那就谈不上连续接近。

**Theorem 3.4: 两个相近系统解的距离上界**

考虑

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

$$\dot{z} = f(t, z) + g(t, z), \quad z(t_0) = z_0.$$

假设  $f$  在集合  $W$  上对  $x$  Lipschitz:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|.$$

扰动项满足

$$\|g(t, x)\| \leq \mu.$$

那么

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| e^{L(t-t_0)} + \frac{\mu}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1).$$

逐步推导如下。写出积分形式:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t [f(s, z(s)) + g(s, z(s))] ds.$$

相减:

$$y(t) - z(t) = y_0 - z_0 + \int_{t_0}^t [f(s, y(s)) - f(s, z(s)) - g(s, z(s))] ds.$$

取范数，用三角不等式:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds + \int_{t_0}^t \|g(s, z(s))\| ds.$$

用 Lipschitz 条件和扰动界:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \gamma + \int_{t_0}^t L \|y(s) - z(s)\| ds + \mu(t - t_0),$$

其中

$$\gamma = \|y_0 - z_0\|.$$

令

$$w(t) = \|y(t) - z(t)\|.$$

则

$$w(t) \leq \gamma + \mu(t - t_0) + L \int_{t_0}^t w(s) ds.$$

应用 Gronwall-Bellman 不等式, 得到

$$w(t) \leq \gamma e^{L(t-t_0)} + \frac{\mu}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1).$$

如果  $L = 0$ , 对应极限形式为

$$w(t) \leq \gamma + \mu(t - t_0).$$

## 这个上界的直觉

第一项

$$\|y_0 - z_0\| e^{L(t-t_0)}$$

来自初值误差。 $L$  越大, 系统对状态差异越敏感, 误差增长上界越大。第二项

$$\frac{\mu}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1)$$

来自向量场扰动  $g$ 。它相当于每一瞬间注入一个大小不超过  $\mu$  的误差, 然后这些误差被系统动力学放大。这个定理只在有限时间区间上给出有用界。如果  $t \rightarrow \infty$ , 即使  $\mu$  很小, 指数项也可能很大。无限时间的连续依赖需要稳定性工具, 第 4 章以后才处理。

## 参数连续依赖

设系统含参数:

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^p.$$

名义参数为  $\lambda_0$ , 名义解为

$$x(t, \lambda_0).$$

如果对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$$

时, 扰动参数系统的解存在于同一有限区间, 并满足

$$\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1],$$

则称解对参数连续依赖。

### Theorem 3.5: 初值和参数的连续依赖

定理假设：

- $f(t, x, \lambda)$  对  $(t, x, \lambda)$  连续。
- $f$  对  $x$  局部 Lipschitz, 且这个 Lipschitz 性对  $t, \lambda$  一致。
- 名义解  $y(t, \lambda_0)$  在  $[t_0, t_1]$  上存在并留在域  $D$  内。

结论：若  $z_0$  接近  $y_0$ , 且  $\lambda$  接近  $\lambda_0$ , 则扰动解  $z(t, \lambda)$  在  $[t_0, t_1]$  上存在, 并且始终接近名义解。

### 管道证明的几何直觉

围绕名义轨线  $y(t, \lambda_0)$  建立一个“管道”：

$$U = \{(t, x) : t \in [t_0, t_1], \|x - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon\}.$$

如果这个管道在域  $D$  内, 则在管道上  $f$  的 Lipschitz 常数有统一上界。又因为  $f$  对参数连续, 在紧集  $U$  上有一致连续性, 所以当  $\lambda$  接近  $\lambda_0$  时：

$$\|f(t, x, \lambda) - f(t, x, \lambda_0)\| < \alpha.$$

这就把参数变化转化成 Theorem 3.4 中的扰动项  $g$ 。选择足够小的初值扰动和参数扰动, 就能保证解不会穿出管道。

### 本节易错点

1. 连续依赖是有限时间结论, 不是自动的无限时间结论。
2. 参数连续依赖需要名义解在整个时间区间内存在并留在域内。
3. 管道证明中真正关键的是紧性：紧集上连续函数才有一致控制。
4. Theorem 3.4 的指数界是上界, 不一定代表实际误差真的指数增长。

### 推导补充

连续依赖的核心是“初值或参数小变, 解也小变”。严格推导时, 最常用工具仍然是积分方程加 Gronwall 不等式。设两个系统解为  $x(t)$  与  $y(t)$ , 满足同一个向量场  $f$ , 但初值不同：

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

两式相减：

$$x(t) - y(t) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds.$$

取范数：

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds.$$

如果在包含两条轨线的管道中  $f$  对  $x$  Lipschitz, 常数为  $L$ , 则

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| + \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\| ds.$$

令

$$z(t) = \|x(t) - y(t)\|, \quad a = \|x_0 - y_0\|.$$

则

$$z(t) \leq a + \int_{t_0}^t L z(s) ds.$$

Gronwall 不等式给出

$$z(t) \leq a e^{L(t-t_0)}.$$

所以

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{L(t-t_0)}.$$

这一步的意义很大：它不仅说明连续依赖，还给出误差放大的定量上界。若时间长度固定，初始误差趋近于零，则整个时间区间上的解误差也趋近于零。若参数也不同，比如

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad \dot{y} = f(t, y, \lambda_0),$$

则相减后多出一个参数误差项：

$$f(s, x(s), \lambda) - f(s, y(s), \lambda_0)$$

把它拆成两段：

$$f(s, x, \lambda) - f(s, y, \lambda_0) = [f(s, x, \lambda) - f(s, y, \lambda)] + [f(s, y, \lambda) - f(s, y, \lambda_0)].$$

第一段由状态 Lipschitz 控制：

$$\|f(s, x, \lambda) - f(s, y, \lambda)\| \leq L \|x - y\|.$$

第二段由参数连续性控制。若在紧管道中  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ , 则

$$\sup_s \|f(s, y(s), \lambda) - f(s, y(s), \lambda_0)\| \rightarrow 0.$$

于是有

$$z(t) \leq a + \int_{t_0}^t L z(s) ds + \int_{t_0}^t \eta(\lambda) ds,$$

其中  $\eta(\lambda) \rightarrow 0$ 。再用 Gronwall，就得到初值和参数共同的连续依赖。本节学习检查：你应该能把“两个解相减”这一步写出来，并能说明为什么参数项必须先拆成“状态差”和“参数差”两部分，否则无法分别使用 Lipschitz 和连续性。

### 1.3 可微性与灵敏度方程

#### 本节核心目标

3.2 节说参数小变时解小变。本节进一步问：解对参数是否可微？如果可微，导数满足什么方程？这个导数就是 sensitivity function，灵敏度函数。工程意义：如果电阻、电感、阻尼、质量等参数有小偏差，我们想快速估计状态轨线会怎么变，而不必对每个参数重新求解完整非线性系统。

#### 参数化系统

系统为

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0,$$

其中：

- $x \in \mathbb{R}^n$ 。
- $\lambda \in \mathbb{R}^p$  是参数向量。
- $x_0$  与  $\lambda$  无关。

假设  $f$  对  $x$  和  $\lambda$  有连续一阶偏导。

#### 从积分方程推导灵敏度方程

积分形式：

$$x(t, \lambda) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s, \lambda), \lambda) ds.$$

对  $\lambda$  求偏导。定义

$$x_\lambda(t, \lambda) = \frac{\partial x(t, \lambda)}{\partial \lambda}.$$

它是  $n \times p$  矩阵，因为  $x$  有  $n$  个分量， $\lambda$  有  $p$  个分量。

对右端求导：

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(s, x(s, \lambda), \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \lambda), \lambda) \frac{\partial x(s, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, x(s, \lambda), \lambda).$$

所以

$$x_\lambda(t, \lambda) = \int_{t_0}^t \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \lambda), \lambda) x_\lambda(s, \lambda) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, x(s, \lambda), \lambda) \right] ds.$$

对  $t$  求导，得到

$$\dot{x}_\lambda(t, \lambda) = A(t, \lambda) x_\lambda(t, \lambda) + B(t, \lambda),$$

其中

$$A(t, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \lambda) \Big|_{x=x(t, \lambda)},$$

$$B(t, \lambda) = \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x, \lambda) \right|_{x=x(t, \lambda)}.$$

初始条件是

$$x_\lambda(t_0, \lambda) = 0,$$

因为  $x(t_0, \lambda) = x_0$ , 而  $x_0$  不依赖  $\lambda$ 。

### 名义灵敏度函数

在名义参数  $\lambda_0$  处定义

$$S(t) = x_\lambda(t, \lambda_0).$$

则

$$\dot{S}(t) = A(t, \lambda_0)S(t) + B(t, \lambda_0), \quad S(t_0) = 0.$$

这是线性时变系统。它的系数  $A(t, \lambda_0)$  不是在平衡点处求的, 而是沿名义轨线  $x(t, \lambda_0)$  求的。

### 一阶近似公式

Taylor 展开:

$$x(t, \lambda) = x(t, \lambda_0) + S(t)(\lambda - \lambda_0) + \text{higher-order terms}.$$

忽略高阶项:

$$x(t, \lambda) \approx x(t, \lambda_0) + S(t)(\lambda - \lambda_0).$$

这里:

- $x(t, \lambda_0)$  是名义解。
- $S(t)$  是灵敏度矩阵。
- $\lambda - \lambda_0$  是参数偏差。
- 乘积  $S(t)(\lambda - \lambda_0)$  是状态偏差的一阶估计。

### 如何实际计算

书中给出两个方法。方法一:

1. 先求名义解  $x(t, \lambda_0)$ 。
2. 沿名义解计算  $A(t, \lambda_0)$ 、 $B(t, \lambda_0)$ 。
3. 解线性时变灵敏度方程。

方法二: 把原状态和灵敏度一起组成增广系统:

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda_0),$$

$$\dot{S} = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \lambda) \right|_{\lambda=\lambda_0} S + \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x, \lambda) \right|_{\lambda=\lambda_0}.$$

这个增广系统维数为  $n + np$ 。如果原系统自治, 增广系统也是自治。

**Example 3.7: 锁相环模型**

模型有参数  $a, b, c$ 。名义值为

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = 1.$$

原状态为  $x_1, x_2$ 。对三个参数分别求灵敏度：

$$\frac{\partial x_1}{\partial a}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial a}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial b}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial b}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial c}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial c}.$$

因此增广系统有  $2 + 2 \cdot 3 = 8$  个状态。书中把它们记为  $x_1, \dots, x_8$ ，其中  $x_3, x_4$  是对  $a$  的灵敏度， $x_5, x_6$  是对  $b$  的灵敏度， $x_7, x_8$  是对  $c$  的灵敏度。图 3.2 显示在给定初值下，解对  $c$  更敏感。这类信息在工程中很重要：如果一个参数的灵敏度大，制造误差或估计误差会显著影响性能，应优先标定或鲁棒化。

**本节易错点**

1. 灵敏度方程是沿轨线线性化，不是只在平衡点线性化。
2.  $S(t)$  是矩阵，不是标量；每一列对应一个参数方向。
3.  $S(t)(\lambda - \lambda_0)$  只是小扰动一阶近似，不是大范围精确公式。
4. 初值若也依赖参数，则  $S(t_0)$  不再是零；本节假设  $x_0$  与参数无关。

**推导补充**

灵敏度方程是在问：解不仅随参数连续变化，是否还可微？如果可微，它的导数本身满足什么动态方程？这就是 sensitivity equation。考虑参数系统

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0(\lambda).$$

这里  $\lambda$  是参数，可能是标量，也可能是向量。为了先看清楚，假设  $\lambda$  是标量。积分形式是

$$x(t, \lambda) = x_0(\lambda) + \int_{t_0}^t f(s, x(s, \lambda), \lambda) ds.$$

定义灵敏度

$$S(t) = \frac{\partial x(t, \lambda)}{\partial \lambda}.$$

对积分方程两边关于  $\lambda$  求导。左边变成  $S(t)$ 。右边第一项变成

$$\frac{\partial x_0(\lambda)}{\partial \lambda}.$$

积分项中  $f$  通过两条路径依赖  $\lambda$ ：一条是显式参数  $\lambda$ ，另一条是状态  $x(s, \lambda)$ 。所以链式法则给出

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(s, x(s, \lambda), \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \lambda), \lambda) \frac{\partial x(s, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, x(s, \lambda), \lambda).$$

代入积分：

$$S(t) = S(t_0) + \int_{t_0}^t \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \lambda), \lambda) S(s) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, x(s, \lambda), \lambda) \right] ds.$$

再对  $t$  求导，得到灵敏度微分方程：

$$\dot{S}(t) = A(t)S(t) + b(t),$$

其中

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \lambda), \lambda),$$

$$b(t) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x(t, \lambda), \lambda).$$

初值为

$$S(t_0) = \frac{\partial x_0(\lambda)}{\partial \lambda}.$$

如果  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ，则  $S(t)$  是一个  $n \times p$  矩阵。第  $j$  列表示状态  $x$  对参数  $\lambda_j$  的灵敏度。矩阵形式仍然是

$$\dot{S} = A(t)S + B(t),$$

其中

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x(t, \lambda), \lambda).$$

这个方程的本质是：灵敏度被系统的线性化矩阵  $A(t)$  传播，同时不断受到参数直接作用  $B(t)$  的注入。一阶近似也由此得到：

$$x(t, \lambda + \Delta\lambda) \approx x(t, \lambda) + S(t)\Delta\lambda.$$

注意这里  $S(t)\Delta\lambda$  的维度是  $n \times p$  乘  $p \times 1$ ，结果是  $n \times 1$ ，与状态维度一致。

本节学习检查：你应该能从积分方程出发，用链式法则写出  $\dot{S} = A(t)S + B(t)$ ，并能解释  $A(t)$  是沿名义轨线的状态 Jacobian，而不是在平衡点固定计算的常矩阵。

## 1.4 比较原理

### 本节核心目标

本节提供一种不用解原系统也能估计状态大小的方法。核心思想是：如果某个标量函数  $v(t)$  的导数被一个标量微分方程控制，那么  $v(t)$  就被那个标量方程的解控制。在 Lyapunov 稳定性中，我们常令

$$v(t) = V(x(t))$$

或

$$v(t) = \|x(t)\|.$$

只要能证明

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t)),$$

就可以用比较方程

$$\dot{u} = f(t, u)$$

给  $v(t)$  作上界。

### 上右导数 $D^+v(t)$

有些重要函数不可处处可微，例如  $v(t) = |x(t)|$  在  $x(t) = 0$  时不可微。为此书中使用 upper right-hand derivative:

$$D^+v(t) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}.$$

如果  $v$  在  $t$  处可微，则

$$D^+v(t) = \dot{v}(t).$$

因此它是普通导数的推广。

### Lemma 3.4: Comparison Lemma

考虑标量方程

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0.$$

若  $v(t)$  连续，并满足

$$D^+v(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) \leq u_0,$$

则在共同存在区间内

$$v(t) \leq u(t).$$

直觉： $v$  的瞬时增长率永远不超过从同一高度出发的  $u$  的增长率，且初始时  $v$  不高于  $u$ ，所以  $v$  不可能从下方穿过  $u$ 。

### Example 3.8: 平方函数上界

系统：

$$\dot{x} = -(1+x^2)x, \quad x(0) = a.$$

取

$$v(t) = x^2(t).$$

逐步求导：

$$\dot{v} = 2x\dot{x}.$$

代入系统：

$$\dot{v} = 2x[-(1+x^2)x].$$

先乘  $x \cdot x = x^2$ ：

$$\dot{v} = -2(1+x^2)x^2.$$

展开：

$$\dot{v} = -2x^2 - 2x^4.$$

因为  $x^4 \geq 0$ ，所以

$$\dot{v} \leq -2x^2 = -2v.$$

比较方程：

$$\dot{u} = -2u, \quad u(0) = a^2.$$

解：

$$\frac{\dot{u}}{u} = -2.$$

积分：

$$\ln u = -2t + C.$$

指数化：

$$u(t) = Ce^{-2t}.$$

由  $u(0) = a^2$ ，得  $C = a^2$ ，所以

$$u(t) = a^2 e^{-2t}.$$

比较引理给出

$$x^2(t) \leq a^2 e^{-2t}.$$

取平方根：

$$|x(t)| \leq |a|e^{-t}.$$

**Example 3.9:** 为什么有时要选  $|x|$  而不是  $x^2$

系统：

$$\dot{x} = -(1+x^2)x + e^t, \quad x(0) = a.$$

若取  $v = x^2$ ，则

$$\dot{v} = 2x[-(1+x^2)x + e^t] = -2x^2 - 2x^4 + 2xe^t.$$

最后一项  $2xe^t$  不容易转成简单线性比较方程。书中改取

$$v = |x|.$$

当  $x \neq 0$  时，

$$\dot{v} = \frac{x\dot{x}}{|x|}.$$

代入：

$$\dot{v} = \frac{x[-(1+x^2)x + e^t]}{|x|} = -\frac{x^2(1+x^2)}{|x|} + \frac{x}{|x|}e^t.$$

因为

$$\frac{x^2}{|x|} = |x|,$$

所以

$$-\frac{x^2(1+x^2)}{|x|} = -|x|(1+x^2).$$

又因为

$$\frac{x}{|x|} \leq 1,$$

所以

$$\dot{v} \leq -|x|(1+x^2) + e^t.$$

由于  $1+x^2 \geq 1$ ,

$$-|x|(1+x^2) \leq -|x|.$$

因此

$$\dot{v} \leq -v + e^t.$$

在  $x=0$  时用  $D^+v$  也能得到同样不等式：

$$D^+v(t) \leq -v(t) + e^t.$$

比较方程：

$$\dot{u} = -u + e^t, \quad u(0) = |a|.$$

解这个线性方程：

$$\dot{u} + u = e^t.$$

乘积分因子  $e^t$ ：

$$e^t \dot{u} + e^t u = e^{2t}.$$

左边是

$$\frac{d}{dt}(e^t u).$$

所以

$$\frac{d}{dt}(e^t u) = e^{2t}.$$

积分：

$$e^t u(t) - u(0) = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1).$$

因此

$$u(t) = e^{-t}|a| + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

于是

$$|x(t)| \leq e^{-t}|a| + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

在相应时间区间内成立。

### 本节易错点

1. 比较引理比较的是标量函数，不直接比较向量。
2. 选  $v = x^2$  还是  $v = |x|$  要看能否得到好用的微分不等式。
3.  $D^+$  不是装饰符号，它是处理不可微点的关键。
4. 上界有限可用于排除有限逃逸。

### 推导补充

Comparison principle 的核心不是“比较两个方程长得像不像”，而是比较两个标量函数的增长速度。典型形式是：如果

$$D^+v(t) \leq f(t, v(t)),$$

而  $u(t)$  满足

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) \geq v(t_0),$$

那么希望推出

$$v(t) \leq u(t).$$

这里  $D^+v(t)$  是上右 Dini 导数：

$$D^+v(t) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}.$$

为什么不用普通导数？因为在 Lyapunov 分析里常出现  $v(t) = \|x(t)\|$  或  $v(t) = |x(t)|$ ，这些函数在  $x = 0$  时可能不可微，但上右导数仍然能表达“最坏瞬时增长率”。证明直觉可以用反证法。假设  $v$  第一次从下方穿过  $u$ 。定义

$$w(t) = v(t) - u(t).$$

开始时  $w(t_0) \leq 0$ 。如果后来  $w$  变正，则存在第一次接触点  $t^*$ ，使

$$w(t^*) = 0, \quad w(t) < 0 \quad (t < t^*, t \rightarrow t^*).$$

在第一次穿越时,  $w$  必须有非负的上右增长趋势, 即

$$D^+w(t^*) \geq 0.$$

但由假设

$$D^+w(t^*) = D^+v(t^*) - \dot{u}(t^*) \leq f(t^*, v(t^*)) - f(t^*, u(t^*)).$$

由于接触点上  $v(t^*) = u(t^*)$ , 右边为

$$f(t^*, v(t^*)) - f(t^*, u(t^*)) = 0.$$

若使用严格扰动版本, 例如把  $u$  改成略高的解, 便可排除穿越。这就是比较引理背后的逻辑。常用模式是把复杂系统降成标量不等式。例如若

$$\dot{V}(x(t)) \leq -cV(x(t)),$$

令  $v(t) = V(x(t))$ , 比较方程为

$$\dot{u} = -cu, \quad u(t_0) = V(x(t_0)).$$

解为

$$u(t) = V(x(t_0))e^{-c(t-t_0)}.$$

因此

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0))e^{-c(t-t_0)}.$$

如果不等式是

$$\dot{V} \leq -aV + b,$$

比较方程为

$$\dot{u} = -au + b.$$

解这个一阶线性方程:

$$\frac{d}{dt}(e^{at}u(t)) = be^{at}.$$

积分:

$$e^{at}u(t) - e^{at_0}u(t_0) = \int_{t_0}^t be^{as} ds = \frac{b}{a}(e^{at} - e^{at_0}).$$

两边除以  $e^{at}$ :

$$u(t) = u(t_0)e^{-a(t-t_0)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-t_0)}).$$

这就是最终有界性和 ISS 推导里不断出现的公式。本节学习检查: 你应该能把任意 Lyapunov 导数不等式改写成一个标量比较方程, 并解出对应上界。

## 1.5 本章习题与训练

### 本节训练目标

3.5 的习题不是为了做大量计算，而是训练第 3 章的基本判断能力：

1. 判断函数是否连续、局部 Lipschitz、全局 Lipschitz。
2. 对具体系统判断是否存在唯一解。
3. 识别有限逃逸时间是否可能发生。
4. 为参数化系统推导灵敏度方程。
5. 用 Gronwall-Bellman 不等式和比较引理构造上界。

### 代表题讲解：Exercise 3.6

题设为

$$\|f(t, x)\| \leq k_1 + k_2 \|x\|, \quad (t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n.$$

要求证明解满足上界，并判断是否可能有限逃逸。从积分形式开始：

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

取范数：

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds.$$

代入增长条件：

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t (k_1 + k_2 \|x(s)\|) ds.$$

展开积分：

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + k_1(t - t_0) + k_2 \int_{t_0}^t \|x(s)\| ds.$$

更直接的方法是用比较方程：

$$\dot{u} = k_1 + k_2 u, \quad u(t_0) = \|x_0\|.$$

解方程：

$$\dot{u} - k_2 u = k_1.$$

乘积分因子  $e^{-k_2(t-t_0)}$ ：

$$\frac{d}{dt} \left( e^{-k_2(t-t_0)} u(t) \right) = k_1 e^{-k_2(t-t_0)}.$$

从  $t_0$  到  $t$  积分：

$$e^{-k_2(t-t_0)} u(t) - u(t_0) = k_1 \int_{t_0}^t e^{-k_2(s-t_0)} ds.$$

计算积分：

$$\int_{t_0}^t e^{-k_2(s-t_0)} ds = \frac{1 - e^{-k_2(t-t_0)}}{k_2}.$$

因此

$$e^{-k_2(t-t_0)} u(t) = \|x_0\| + \frac{k_1}{k_2} (1 - e^{-k_2(t-t_0)}).$$

两边乘以  $e^{k_2(t-t_0)}$  :

$$u(t) = \|x_0\| e^{k_2(t-t_0)} + \frac{k_1}{k_2} (e^{k_2(t-t_0)} - 1).$$

比较引理给出

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| e^{k_2(t-t_0)} + \frac{k_1}{k_2} (e^{k_2(t-t_0)} - 1).$$

这个右端在任意有限时间上有限，因此状态不可能在有限时间趋于无穷大。结论：在该线性增长条件下，有限逃逸时间不可能发生。

### 推导补充

习题节不是额外内容，而是第 3 章三条主线的训练：存在唯一性、连续依赖、灵敏度/比较。做题时建议按下面流程。第一类题：判断 Lipschitz。不要先猜结论，而要问：在哪个集合上判断？若在紧集上且  $f$  连续可微，通常局部 Lipschitz 成立。若要求全局 Lipschitz，就要检查 Jacobian 是否全局有界。例如一维函数  $f(x) = x^2$  的导数是  $2x$ ，它在任意有限区间有界，但在  $\mathbb{R}$  上无界，所以局部 Lipschitz 但非全局 Lipschitz。第二类题：证明全局存在。最直接路线是全局 Lipschitz；但很多非线性系统不满足。此时使用 Theorem 3.3 的思路：证明轨线留在某个紧集内。常见办法是找一个函数  $V(x)$ ，证明

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0.$$

若  $V$  的子水平集

$$\Omega_c = \{x : V(x) \leq c\}$$

是紧集，且  $x(t_0) \in \Omega_c$ ，则轨线一直留在  $\Omega_c$  内。这就排除了有限逃逸。第三类题：求灵敏度。流程是固定的：先写名义轨线  $x(t, \lambda_0)$ ，再计算

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \lambda_0), \lambda_0), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x(t, \lambda_0), \lambda_0),$$

最后解

$$\dot{S} = A(t)S + B(t).$$

第四类题：用 comparison lemma。先把目标量写成标量  $v(t)$ ，例如  $v = \|x\|$  或  $v = V(x)$ ，再推出

$$D^+v \leq \phi(t, v).$$

然后解比较方程  $\dot{u} = \phi(t, u)$ 。不要直接对向量不等式“积分”，因为向量没有自然大小关系；必须先转成标量。

本节学习检查：做第3章题时，你应该先识别题型，再选工具。Lipschitz 管唯一性，紧集管全局存在，Gronwall 管连续依赖，灵敏度方程管一阶参数影响，comparison 管标量上界。

### 1.6 证明细节与理解补充

本附录把第三章中最常用而又最容易被省略的推导集中写出。正文已经说明了存在唯一性、连续依赖、灵敏度方程和比较原理的用法；这里补充证明模板，使读者在遇到类似题目时可以按步骤复现。

#### 1.6.1 从积分方程到压缩映射

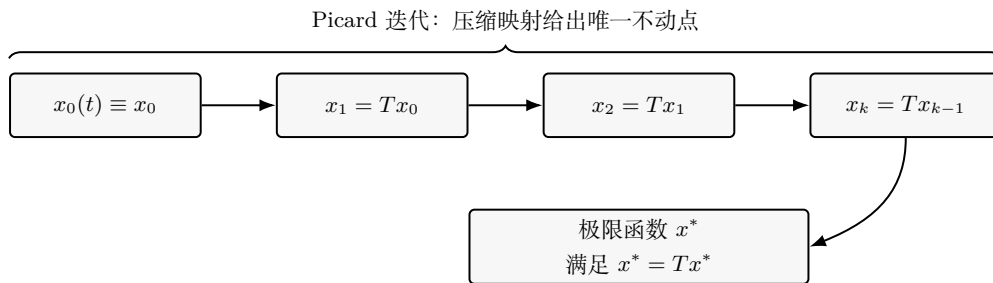


图 1.3 Picard 迭代把微分方程转化为不动点问题。

考虑初值问题

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

其中  $f$  对  $t$  分段连续，并且在矩形区域

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$$

内对  $x$  满足 Lipschitz 条件

$$\|f(t, x) - f(t, z)\| \leq L\|x - z\|.$$

把微分方程改写为积分方程

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

定义算子

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

若能证明  $T$  在某个完备函数空间中有唯一不动点，则这个不动点就是原初值问题的唯一解。

**引理 1.2 (映射保持闭球).** 设  $M = \sup_{(t,x) \in R} \|f(t,x)\|$ . 令

$$h \leq \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

则对所有满足  $\|x(t) - x_0\| \leq b$  的连续函数  $x(\cdot)$ , 有

$$\|(Tx)(t) - x_0\| \leq b, \quad t \in [t_0, t_0 + h].$$

证明. 由积分定义,

$$\|(Tx)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\|.$$

利用积分三角不等式,

$$\|(Tx)(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds.$$

由于轨线图像位于  $R$ , 有  $\|f(s, x(s))\| \leq M$ , 因此

$$\|(Tx)(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t M ds = M(t - t_0) \leq Mh \leq b.$$

所以  $T$  不会把函数推出半径为  $b$  的闭球。 □

**引理 1.3 (局部压缩性).** 若再要求  $Lh < 1$ , 则

$$\|Tx - Tz\|_\infty \leq Lh\|x - z\|_\infty,$$

其中  $\|x\|_\infty = \sup_{t \in [t_0, t_0+h]} \|x(t)\|$ .

证明. 由  $T$  的定义,

$$(Tx)(t) - (Tz)(t) = \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, z(s))] ds.$$

取范数得

$$\|(Tx)(t) - (Tz)(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, z(s))\| ds.$$

代入 Lipschitz 条件,

$$\|(Tx)(t) - (Tz)(t)\| \leq L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds.$$

由于  $\|x(s) - z(s)\| \leq \|x - z\|_\infty$ ,

$$\|(Tx)(t) - (Tz)(t)\| \leq L(t - t_0)\|x - z\|_\infty \leq Lh\|x - z\|_\infty.$$

对  $t$  取上确界即可得到结论. 若  $Lh < 1$ ,  $T$  是压缩映射。 □

**定理 1.2 (局部存在唯一性的证明模板).** 在上述假设下, 若

$$h < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L} \right\},$$

则初值问题在  $[t_0, t_0 + h]$  上存在唯一解。

证明. 连续函数空间  $C([t_0, t_0 + h], \mathbb{R}^n)$  在  $\|\cdot\|_\infty$  下是完备空间. 由前两个引理,  $T$  把闭球映入自身且是压缩映射. Banach 不动点定理给出唯一不动点  $x = Tx$ . 不动点满足积分方程, 因此是解. 若另有解  $z$ , 则同样满足  $z = Tz$ , 由不动点唯一性得  $z = x$ . □

## 1.6.2 唯一性的 Gronwall 证明

压缩映射给出存在唯一性，但在控制中更常用的唯一性证明来自 Gronwall 不等式。设  $x(t)$  和  $z(t)$  是同一初值  $x_0$  出发的两个解。积分形式分别为

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad z(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds.$$

相减得

$$x(t) - z(t) = \int_{t_0}^t \{f(s, x(s)) - f(s, z(s))\} ds.$$

取范数并用 Lipschitz 条件，

$$\|x(t) - z(t)\| \leq L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds.$$

令  $w(t) = \|x(t) - z(t)\|$ 。则

$$w(t) \leq L \int_{t_0}^t w(s) ds.$$

Gronwall 不等式中  $a = 0$ ，所以

$$w(t) \leq 0 \cdot e^{L(t-t_0)} = 0.$$

因此  $x(t) = z(t)$ 。这一步说明：唯一性并不来自连续性，而来自向量场对状态差异的线性约束。

## 1.6.3 有限逃逸的排除方法

**命题 1.2 (线性增长排除有限逃逸)**. 若存在常数  $k_1, k_2 \geq 0$ ，使得

$$\|f(t, x)\| \leq k_1 + k_2 \|x\|, \quad \forall (t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n,$$

则任意解在有限时间内不会逃逸。

证明. 由积分形式，

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t (k_1 + k_2 \|x(s)\|) ds.$$

设  $r(t) = \|x(t)\|$ 。比较方程为

$$\dot{u} = k_1 + k_2 u, u(t_0) = \|x_0\|.$$

若  $k_2 > 0$ ，求解得

$$u(t) = \left( \|x_0\| + \frac{k_1}{k_2} \right) e^{k_2(t-t_0)} - \frac{k_1}{k_2}.$$

比较原理给出  $\|x(t)\| \leq u(t)$ 。对任意有限  $T$ ，右端在  $[t_0, T]$  上有限，因此  $x(t)$  不可能在  $T$  之前变成无穷大。若  $k_2 = 0$ ，则  $u(t) = \|x_0\| + k_1(t - t_0)$ ，同样有限。□

**注 1.1 (为什么超线性增长可能导致有限逃逸)**. 标量系统  $\dot{x} = x^2$  的解为

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}.$$

若  $x_0 > 0$ ，分母在  $t = t_0 + 1/x_0$  变为零，于是解在有限时间发散。这里右端增长阶为  $\|x\|^2$ ，不能被  $k_1 + k_2 \|x\|$  全局控制。这个例子说明，有限逃逸不是数值错误，而可能是模型本身的性质。

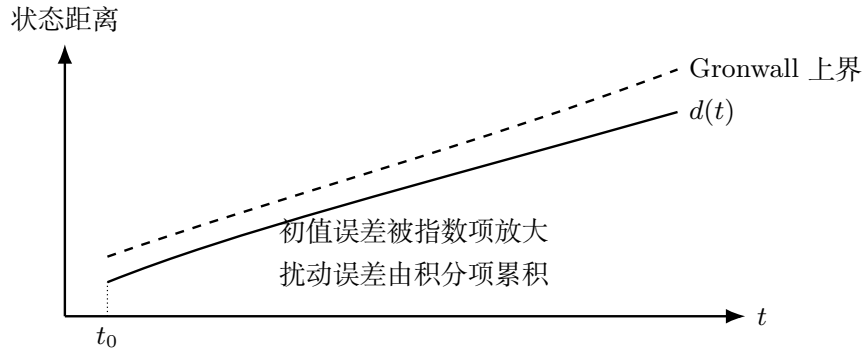


图 1.4 连续依赖估计中的初值误差与扰动误差。

#### 1.6.4 连续依赖与扰动估计的完整推导

考虑两条轨线

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y), & y(t_0) &= y_0, \\ \dot{z} &= f(t, z) + g(t, z), & z(t_0) &= z_0, \end{aligned}$$

并假设

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\|y - z\|, \quad \|g(t, z)\| \leq \mu.$$

从积分形式相减，

$$y(t) - z(t) = y_0 - z_0 + \int_{t_0}^t \{f(s, y(s)) - f(s, z(s)) - g(s, z(s))\} ds.$$

取范数，

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| + L \int_{t_0}^t \|y(s) - z(s)\| ds + \mu(t - t_0).$$

令  $w(t) = \|y(t) - z(t)\|$ ,  $\gamma = \|y_0 - z_0\|$ 。直接使用非齐次 Gronwall 公式，

$$w(t) \leq \gamma e^{L(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} \mu ds.$$

计算卷积积分：

$$\int_{t_0}^t e^{L(t-s)} \mu ds = \mu \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} ds.$$

令  $\tau = t - s$ ，当  $s = t_0$  时  $\tau = t - t_0$ ，当  $s = t$  时  $\tau = 0$ ，因此

$$\int_{t_0}^t e^{L(t-s)} ds = \int_0^{t-t_0} e^{L\tau} d\tau = \frac{e^{L(t-t_0)} - 1}{L}.$$

最终得到

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \gamma e^{L(t-t_0)} + \frac{\mu}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1)$$

当  $L = 0$  时，取极限得到  $w(t) \leq \gamma + \mu(t - t_0)$ 。

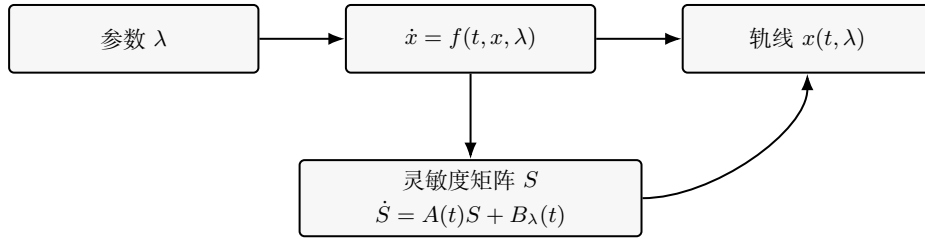


图 1.5 参数灵敏度方程是沿名义轨线的线性时变系统。

### 1.6.5 灵敏度方程的推导

设

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0(\lambda),$$

其中参数  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ 。若  $x(t, \lambda)$  对  $\lambda$  可微，定义灵敏度矩阵

$$S(t) = \frac{\partial x(t, \lambda)}{\partial \lambda} \in \mathbb{R}^{n \times p}.$$

对状态方程两边关于  $\lambda$  求偏导：

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \dot{x}(t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, x(t, \lambda), \lambda).$$

左边为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x(t, \lambda)}{\partial \lambda} = \dot{S}(t).$$

右边用链式法则：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \lambda), \lambda) S(t) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x(t, \lambda), \lambda).$$

所以

$$\boxed{\dot{S}(t) = A(t)S(t) + B_\lambda(t)}$$

其中

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \lambda), \lambda), \quad B_\lambda(t) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x(t, \lambda), \lambda).$$

初值由  $x(t_0, \lambda) = x_0(\lambda)$  给出：

$$S(t_0) = \frac{\partial x_0(\lambda)}{\partial \lambda}.$$

若初值不依赖参数，则  $S(t_0) = 0$ 。这就是灵敏度方程。

**注 1.2 (控制工程含义)** 灵敏度方程是线性时变系统。它沿着名义轨线  $x(t, \lambda)$  变化，描述参数微小变化如何一阶影响轨线。在线性化、参数辨识、鲁棒性分析和最优控制梯度计算中，灵敏度方程都是基础工具。

### 1.6.6 比较原理的证明骨架

比较原理的基本思想是：若某个标量函数  $v(t)$  的增长速度不超过另一个标量系统  $\dot{r} = \phi(t, r)$  的增长速度，并且初值也不超过，则  $v(t)$  永远不超过比较系统的解。设

$$D^+ v(t) \leq \phi(t, v(t)), \quad \dot{r} = \phi(t, r), \quad r(t_0) = r_0,$$

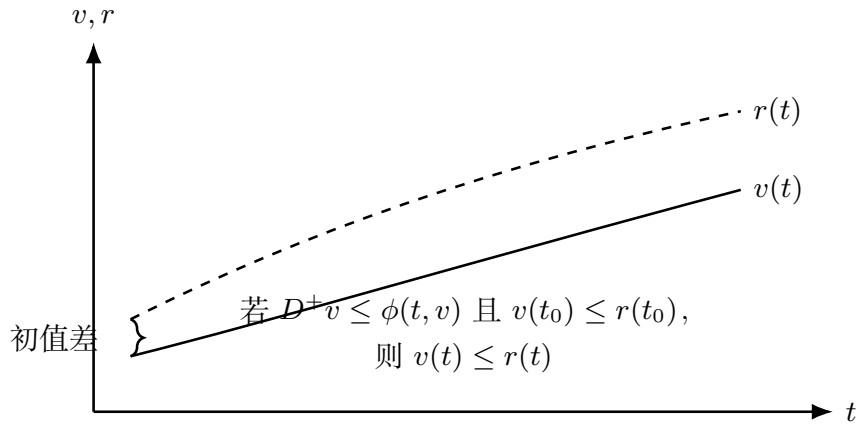


图 1.6 比较原理用标量上界控制非线性轨线。

且  $v(t_0) \leq r_0$ 。为了说明证明思路，引入小量  $\epsilon > 0$ ，考虑严格比较系统

$$\dot{r}_\epsilon = \phi(t, r_\epsilon) + \epsilon, \quad r_\epsilon(t_0) = r_0 + \epsilon.$$

由于初值严格大且右端严格大，可以先证明  $v(t) < r_\epsilon(t)$  在有限区间内成立。若存在第一次相交时刻  $t_1$ ，则在  $t_1$  之前有  $v < r_\epsilon$ ，在  $t_1$  有  $v = r_\epsilon$ 。利用  $\phi$  对第二个变量的单调/Lipschitz 性和  $\epsilon$  的严格增量，可推出  $v$  在相交处的上右导数小于  $r_\epsilon$  的导数，从而不可能从下方追上。最后令  $\epsilon \downarrow 0$ ，得到  $v(t) \leq r(t)$ 。

**注 1.3 (为什么需要上右导数).** 在 Lyapunov 分析中， $V(x(t))$  往往沿解连续但未必处处可微，尤其在使用最大值函数、范数或非光滑 Lyapunov 函数时。上右导数  $D^+v(t)$  只看右侧变化率的上极限，足以控制未来增长，因此比普通导数更适合比较原理。

1.6.7 例题一：连续但不唯一

考虑

$$\dot{x} = x^{1/3}, \quad x(0) = 0.$$

一个解是零解

$$x_0(t) \equiv 0.$$

验证为

$$\dot{x}_0(t) = 0 = x_0^{1/3}(t).$$

另一个解为

$$x_1(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2}, \quad t \geq 0.$$

逐步求导。令  $q(t) = 2t/3$ ，则

$$x_1 = q^{3/2}, \quad \dot{q} = \frac{2}{3}.$$

于是

$$\dot{x}_1 = \frac{3}{2}q^{1/2}\dot{q} = \frac{3}{2}q^{1/2} \cdot \frac{2}{3} = q^{1/2}.$$

另一方面，

$$x_1^{1/3} = \left(q^{3/2}\right)^{1/3} = q^{1/2}.$$

故  $\dot{x}_1 = x_1^{1/3}$ 。甚至对任意等待时间  $a \geq 0$ ,

$$x_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a, \\ \left(\frac{2(t-a)}{3}\right)^{3/2}, & t > a, \end{cases}$$

都是解。原因是  $f(x) = x^{1/3}$  在原点连续但不满足 Lipschitz 条件:

$$\frac{|x^{1/3} - 0|}{|x - 0|} = |x|^{-2/3} \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow 0.$$

因此连续保证存在, Lipschitz 才保证唯一。

### 1.6.8 例题二：有限逃逸时间

考虑

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0 > 0.$$

分离变量:

$$\frac{dx}{x^2} = dt.$$

积分得

$$-\frac{1}{x(t)} = t + C.$$

由  $x(0) = x_0$ , 得  $C = -1/x_0$ , 所以

$$-\frac{1}{x(t)} = t - \frac{1}{x_0}.$$

两边乘以  $-1$ :

$$\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x_0} - t.$$

于是

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

当  $t \uparrow 1/x_0$  时, 分母趋于零,  $x(t) \rightarrow \infty$ 。这说明“局部存在唯一”不等于“全局存在”。若要排除有限逃逸, 需要额外的增长条件或 Lyapunov 有界性。

### 1.6.9 例题三：Gronwall 估计的使用

设两条轨线满足

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \gamma + L \int_0^t \|y(s) - z(s)\| ds + \mu t.$$

令  $w(t) = \|y(t) - z(t)\|$ 。非齐次 Gronwall 给出

$$w(t) \leq \gamma e^{Lt} + \int_0^t e^{L(t-s)} \mu ds.$$

计算积分:

$$\int_0^t e^{L(t-s)} \mu ds = \mu e^{Lt} \int_0^t e^{-Ls} ds = \mu e^{Lt} \frac{1 - e^{-Lt}}{L} = \frac{\mu}{L} (e^{Lt} - 1).$$

所以

$$w(t) \leq \gamma e^{Lt} + \frac{\mu}{L} (e^{Lt} - 1).$$

这个公式告诉我们: 初值误差被指数放大, 持续扰动被指数核卷积累积。若系统本身稳定, 后续章节会把这个指数增长估计改进为衰减估计。

## 1.7 本章自检

### 1.7.1 第三章自检

1. 能从微分方程写出积分方程, 并解释为什么积分形式更适合处理分段连续右端。
2. 能判断给定  $f(t, x)$  是否局部 Lipschitz、全局 Lipschitz, 并能说明连续不等于唯一。
3. 能用 Gronwall 不等式证明同一初值的两条解必须相同。
4. 能用线性增长条件排除有限逃逸。
5. 能对含参数系统写出灵敏度方程, 并说明  $A(t)$  是沿名义轨线的 Jacobian。
6. 能用比较系统给出状态上界, 而不是直接猜测轨线行为。

## Lyapunov 稳定性：从局部能量到非自治估计

本章的核心问题是：不显式求解微分方程，如何判断平衡点是否稳定、吸引或渐近稳定。Lyapunov 方法的思想很直接：为系统构造一个类似“能量”的标量函数，如果这个量沿轨线不增或严格下降，就能推出轨线不会远离平衡点，甚至最终收敛到平衡点。

为了避免把本章读成一堆定理，应当先区分三层逻辑。第一层是自治系统：用正定函数和负定导数证明稳定或渐近稳定。第二层是结构化增强：当导数只有半负定时，用 LaSalle 不变性原理进一步分析极限集合。第三层是工程系统中更常见的情形：系统时变、有扰动、输入不为零，此时需要比较函数、一致稳定、有界性和输入到状态稳定性。它们本质上仍然是在建立一个可积、可比较、可递推的下降估计。

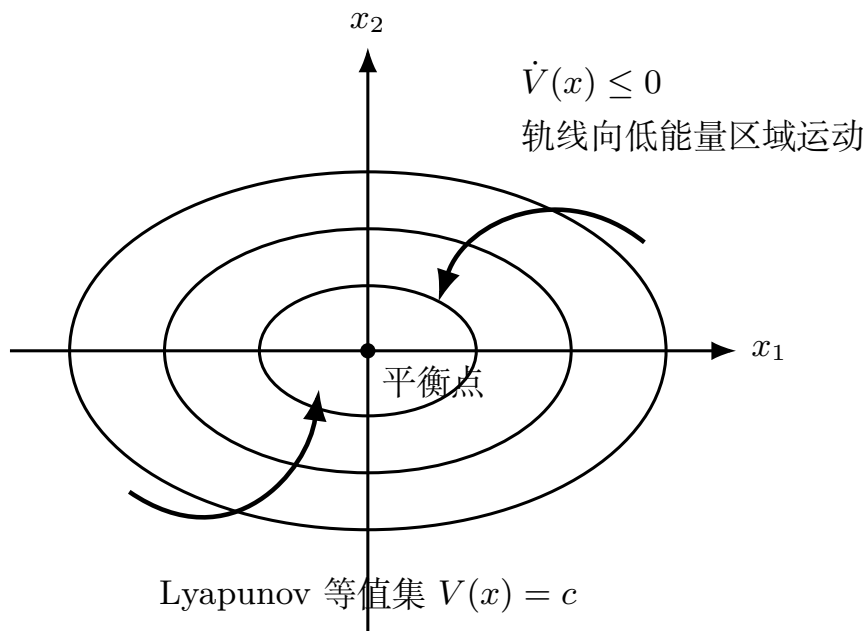


图 2.1 Lyapunov 等值集与能量下降的几何图像。

第 4 章的核心问题是：不显式求解非线性微分方程，如何判断平衡点附近轨线是否保持小、是否收敛、是否按指数速度收敛，以及有输入或扰动时状态是否仍被控制在可接受范围内。本章主线是

能量函数  $V \Rightarrow \dot{V}$  的符号  
 $\Rightarrow$  子水平集不变性  
 $\Rightarrow$  稳定、渐近稳定、指数稳定、最终有界、ISS.

其中第 4.1 节是基本 Lyapunov 定理，第 4.2 节处理  $\dot{V} \leq 0$  但不是负定时的 LaSalle 不变性，第 4.3 节连接线性系统和线性化，第 4.4 节建立比较函数语言，第 4.5-4.6 节推广到时变系统，第 4.7 节给逆定理，第 4.8-4.9 节处理有界性和有输入系统。

**定义 2.1 (Lyapunov 稳定、渐近稳定与指数稳定).** 设原点为自治系统  $\dot{x} = f(x)$  的平衡点。若初值足够小可保证轨线始终足够小，则原点稳定；若还满足  $x(t) \rightarrow 0$ ，则原点渐近稳定；若存在  $c, k > 0$  使  $\|x(t)\| \leq ce^{-k(t-t_0)}\|x(t_0)\|$ ，则原点指数稳定。

**定理 2.1 (Lyapunov 直接法).** 若存在正定函数  $V(x)$ ，并且沿轨线有  $\dot{V}(x) \leq 0$ ，则平衡点稳定；若进一步  $\dot{V}(x)$  负定，则平衡点渐近稳定。在径向无界条件下，相应结论可推广为全局结论。

**定理 2.2 (LaSalle 不变性原理).** 若  $\Omega$  为正不变紧集， $V$  在  $\Omega$  上满足  $\dot{V} \leq 0$ ，则轨线趋向集合  $\{x : \dot{V}(x) = 0\}$  中的最大不变集。

**命题 2.1 (线性化判据).** 若线性化矩阵  $A = \partial f / \partial x(0)$  为 Hurwitz，则非线性系统的原点局部指数稳定；若  $A$  有特征值实部为正，则原点不稳定。

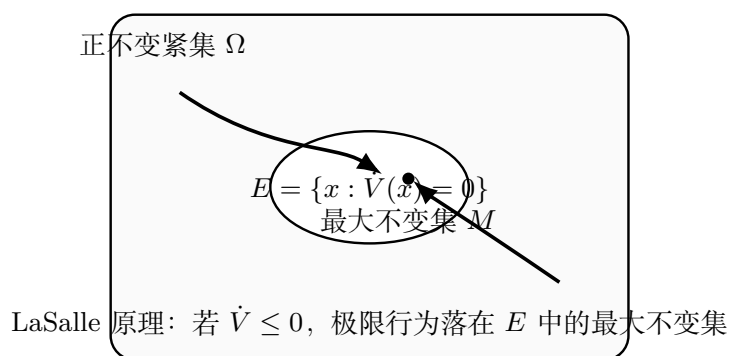


图 2.2 LaSalle 原理把极限行为缩小到最大不变集。

## 2.1 自治系统的 Lyapunov 方法

### 本节核心目标

本节研究自治系统

$$\dot{x} = f(x), \tag{4.1-a}$$

其中  $x \in \mathbb{R}^n$  是状态， $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  是不显含时间的向量场， $D \subset \mathbb{R}^n$  是包含原点的域。自治的意思是：同一个状态  $x$  在任何时间对应同一个速度  $f(x)$ 。

本节要建立四件事：

1. 稳定、渐近稳定、不稳定的定义。
2. Lyapunov 函数的沿轨线导数。
3. Lyapunov 稳定定理与全局渐近稳定定理。
4. Chetaev 不稳定定理。

### 把任意平衡点移到原点

若  $\bar{x}$  是平衡点，则

$$f(\bar{x}) = 0.$$

令

$$z = x - \bar{x}.$$

因为  $\bar{x}$  是常数，所以

$$\dot{z} = \dot{x}.$$

又因为  $x = z + \bar{x}$ ，代入原系统：

$$\dot{z} = f(z + \bar{x}).$$

定义

$$g(z) = f(z + \bar{x}).$$

于是

$$g(0) = f(\bar{x}) = 0.$$

所以研究  $x = \bar{x}$  的稳定性等价于研究新坐标  $z = 0$  的稳定性。主教材之后默认平衡点在原点，就是因为可以这样平移。

#### Definition 4.1: 稳定、渐近稳定、不稳定

原点稳定：对每个允许误差半径  $\varepsilon > 0$ ，存在一个初始半径  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ，使得

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.1-b)$$

这句话逐字翻译就是：只要起点足够靠近原点，之后所有时间都不会离原点超过  $\varepsilon$ 。

渐近稳定：在稳定的基础上，还存在某个吸引半径  $r > 0$ ，使得

$$\|x(0)\| < r \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (4.1-c)$$

稳定只要求“不跑远”；渐近稳定要求“不跑远并最终回来”。不稳定：如果稳定定义失败，即存在某个  $\varepsilon_0 > 0$ ，无论初值取得多小，都能找到一条轨线最终跑出  $\varepsilon_0$ -球，则原点不稳定。

#### Lyapunov 函数与沿轨线导数

取一个连续可微函数

$$V : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

如果  $x(t)$  是系统轨线，则复合函数  $V(x(t))$  对时间求导。按链式法则：

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}(x(t))\dot{x}(t).$$

其中  $\frac{\partial V}{\partial x}$  是  $1 \times n$  行向量：

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right].$$

代入  $\dot{x} = f(x)$ ，得到

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x). \quad (4.1-d)$$

这不是新的动力学方程，而是能量函数沿系统轨线的变化率。

**正定、半正定、负定**

函数  $V$  正定，意思是

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0 \quad x \neq 0.$$

正半定，意思是

$$V(0) = 0, \quad V(x) \geq 0.$$

负定就是  $-V$  正定；负半定就是  $-V$  正半定。对二次型

$$V(x) = x^T P x,$$

若  $P = P^T > 0$ ，则  $V$  正定。原因是对称正定矩阵满足特征值界

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2.$$

当  $x \neq 0$  时， $\lambda_{\min}(P) > 0$ ，所以  $x^T P x > 0$ 。

**Theorem 4.1: Lyapunov 稳定定理**

若存在连续可微函数  $V$ ，满足

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0 \quad x \neq 0,$$

并且

$$\dot{V}(x) \leq 0,$$

则原点稳定。若进一步

$$\dot{V}(x) < 0, \quad x \neq 0,$$

则原点渐近稳定。

**稳定性的逐步证明**

给定一个  $\varepsilon > 0$ 。我们想找  $\delta$ ，使得初值在  $\delta$ -球内时轨线永远留在  $\varepsilon$ -球内。

第 1 步：在边界球面  $\|x\| = \varepsilon$  上看  $V$ 。因为球面是紧集， $V$  连续，所以最小值存在。定义

$$m_\varepsilon = \min_{\|x\|=\varepsilon} V(x).$$

由于  $V$  正定，边界上没有  $x = 0$ ，所以

$$m_\varepsilon > 0.$$

第 2 步：由于  $V(0) = 0$  且  $V$  连续，可以选择足够小的  $\delta > 0$ ，使得

$$\|x\| < \delta \quad \Rightarrow \quad V(x) < m_\varepsilon.$$

第 3 步：若  $\|x(0)\| < \delta$ ，则

$$V(x(0)) < m_\varepsilon.$$

又因为  $\dot{V} \leq 0$ ，沿轨线

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) < m_\varepsilon.$$

第 4 步：如果某个时刻轨线碰到  $\varepsilon$ -球边界，即  $\|x(t_*)\| = \varepsilon$ ，那么按照  $m_\varepsilon$  的定义：

$$V(x(t_*)) \geq m_\varepsilon.$$

这和前面的  $V(x(t_*)) < m_\varepsilon$  矛盾。因此轨线不可能碰到边界，更不可能跑出球。稳定性得证。

### 渐近稳定性的逐步证明

如果  $\dot{V} < 0$ ，则  $V(x(t))$  严格下降，且由于  $V \geq 0$ ，它有极限：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = c \geq 0.$$

如果  $c > 0$ ，那么轨线最终必须停留在一个远离原点的紧环域中。因为  $\dot{V}$  在这个紧环域上连续且处处负，所以存在  $\eta > 0$ ，使

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\eta.$$

积分得到

$$V(x(t)) \leq V(x(T)) - \eta(t - T).$$

当  $t$  足够大，右端会变成负数，但  $V \geq 0$ ，矛盾。因此

$$c = 0.$$

由  $V$  正定且局部夹逼原点，可以推出

$$x(t) \rightarrow 0.$$

**Example: 无摩擦摆**  
系统为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a \sin x_1.$$

取能量函数

$$V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

逐步求导：

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = a \sin x_1, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = x_2.$$

因此

$$\dot{V} = a \sin x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2.$$

代入系统：

$$\dot{V} = a \sin x_1 x_2 + x_2(-a \sin x_1).$$

展开第二项：

$$\dot{V} = ax_2 \sin x_1 - ax_2 \sin x_1 = 0.$$

能量守恒，所以只能推出稳定，不能推出渐近稳定。

**Example：有摩擦摆**  
系统为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - bx_2, \quad b > 0.$$

仍取

$$V = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

沿轨线：

$$\dot{V} = a \sin x_1 x_2 + x_2(-a \sin x_1 - bx_2).$$

逐项展开：

$$\dot{V} = ax_2 \sin x_1 - ax_2 \sin x_1 - bx_2^2.$$

前两项抵消：

$$\dot{V} = -bx_2^2 \leq 0.$$

注意： $\dot{V} = 0$  在整条  $x_2 = 0$  线上成立，不只在原点成立，所以 Theorem 4.1 只能直接给稳定。要证明渐近稳定，需要第 4.2 节的 LaSalle 不变性原理。

**Theorem 4.2：全局渐近稳定**

若  $D = \mathbb{R}^n$ ， $V$  正定， $\dot{V}$  负定，并且  $V$  径向无界：

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty,$$

则原点全局渐近稳定。径向无界的作用是让所有子水平集

$$\Omega_c = \{x : V(x) \leq c\}$$

都是有界闭集，也就是紧集。这样任意初值都被困在某个紧的子水平集中，排除了有限逃逸和跑向无穷远的可能。

**Chetaev 不稳定定理**

Chetaev 定理用于证明不稳定。核心思想是找一个函数  $V$ ，在原点附近某个区域中  $V > 0$ ，并且

$$\dot{V} > 0.$$

若轨线从这个区域出发， $V$  会继续增大，它不能回到  $V = 0$  的边界，只能穿出任意小邻域。这说明即使初值任意小，也会离开某个固定邻域，于是原点不稳定。

**本节易错点**

1.  $\dot{V} \leq 0$  一般只证明稳定，不自动证明收敛。
2.  $V$  正定和  $\dot{V}$  负定是两个不同条件。
3. 全局结论需要径向无界或其他排除逃逸的条件。
4. Lyapunov 函数不是唯一的；找不到某个候选函数不代表系统不稳定。

**推导补充**

Lyapunov 稳定性的定义里有三个量： $\epsilon$ 、 $\delta$ 、初始时间。自治系统不显式依赖时间，所以通常不强调  $t_0$ 。稳定的量词结构是：对每个允许误差半径  $\epsilon > 0$ ，都能找到一个初始半径  $\delta > 0$ ，只要

$$\|x(t_0)\| < \delta,$$

就有

$$\|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

这只保证“不离开”，不保证“靠近”。渐近稳定多了收敛：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Lyapunov 函数  $V(x)$  的角色是把几何问题变成能量问题。若

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2$  是正定函数，那么  $V$  小等价于  $x$  小。若同时

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0,$$

则  $V(x(t))$  不增加。稳定性的证明可以一步一步写成：

1. 给定  $\epsilon$ ，由  $\alpha_1$  得到边界上的最低能量  $\alpha_1(\epsilon)$ 。
2. 选  $\delta$ ，使  $\alpha_2(\delta) < \alpha_1(\epsilon)$ 。
3. 若  $\|x(t_0)\| < \delta$ ，则

$$V(x(t_0)) \leq \alpha_2(\|x(t_0)\|) < \alpha_2(\delta) < \alpha_1(\epsilon).$$

4. 因为  $\dot{V} \leq 0$ ，所以

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0)) < \alpha_1(\epsilon).$$

5. 如果某时  $\|x(t)\| \geq \epsilon$ ，则

$$V(x(t)) \geq \alpha_1(\|x(t)\|) \geq \alpha_1(\epsilon),$$

与第 4 步矛盾。因此  $\|x(t)\| < \epsilon$ 。渐近稳定还需要  $\dot{V}$  负定。若

$$\dot{V} \leq -W(x),$$

且  $W(x) > 0$  对所有  $x \neq 0$  成立，那么沿轨线积分：

$$V(x(t)) - V(x(t_0)) \leq - \int_{t_0}^t W(x(s)) ds.$$

整理：

$$\int_{t_0}^t W(x(s)) ds \leq V(x(t_0)) - V(x(t)) \leq V(x(t_0)).$$

令  $t \rightarrow \infty$ , 得到  $W(x(t))$  可积。再结合轨线有界和连续性, 可推出  $W(x(t)) \rightarrow 0$ , 于是  $x(t) \rightarrow 0$ 。

全局渐近稳定还要  $V$  径向无界：

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty.$$

这样每个子水平集  $\{x : V(x) \leq c\}$  都是有界闭集, 轨线不会逃到无穷远。本节学习检查：你应该能从  $\alpha_1, \alpha_2$  夹逼关系出发, 完整写出 Lyapunov 稳定性的  $\epsilon$ - $\delta$  证明。

## 2.2 不变性原理

### 本节核心目标

第 4.1 节中, 有摩擦摆给出了典型困难：

$$\dot{V} = -bx_2^2 \leq 0,$$

但  $\dot{V} = 0$  的集合不是只有原点, 而是整条直线  $x_2 = 0$ 。Theorem 4.1 无法直接推出渐近稳定。第 4.2 节的 LaSalle 不变性原理回答：如果  $\dot{V} = 0$  的集合中, 真正能让系统轨线永远停留的最大不变集只有原点, 那么轨线仍会收敛到原点。

### 正不变集

集合  $M$  正不变, 意思是：若

$$x(0) \in M,$$

则

$$x(t) \in M, \quad t \geq 0.$$

Lyapunov 子水平集常常是正不变集。若

$$\Omega_c = \{x : V(x) \leq c\}$$

且  $\dot{V} \leq 0$ , 则从  $\Omega_c$  出发有

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq c,$$

所以

$$x(t) \in \Omega_c.$$

**正极限集**

给定轨线  $x(t)$ ，它的正极限集  $L^+$  是所有可能的极限点集合：点  $p$  属于  $L^+$ ，若存在时间序列  $t_k \rightarrow \infty$ ，使

$$x(t_k) \rightarrow p.$$

若轨线有界且始终留在闭集内，则正极限集非空、紧、连通，并且是正不变的。这就是 Lemma 4.1 的直觉。

**Theorem 4.4: LaSalle 不变性原理**

设  $\Omega \subset D$  是紧的正不变集， $V$  连续可微，且

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad x \in \Omega.$$

定义

$$E = \{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}.$$

令  $M$  是  $E$  中的最大不变集。则从  $\Omega$  出发的每条轨线都趋近于  $M$ 。

**为什么只需要看最大不变集**

沿轨线  $V(x(t))$  单调不增且下界有限，因此

$$V(x(t)) \rightarrow a$$

对某个常数  $a$  成立。若  $p$  是极限点，则存在  $t_k \rightarrow \infty$ ，使

$$x(t_k) \rightarrow p.$$

由  $V$  连续：

$$V(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(x(t_k)) = a.$$

因此正极限集上的  $V$  恒等于  $a$ 。由于正极限集本身正不变，如果沿着正极限集内的轨线  $\dot{V} < 0$ ，那么  $V$  会下降，和  $V \equiv a$  矛盾。所以正极限集必须包含在

$$E = \{x : \dot{V} = 0\}$$

中，并且由于它是不变的，它必须包含在  $E$  的最大不变子集中。

**有摩擦摆的 LaSalle 推导**

系统：

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - bx_2.$$

取

$$V = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

上一节已得

$$\dot{V} = -bx_2^2.$$

所以

$$E = \{x : x_2 = 0\}.$$

要找  $E$  中最大不变集。若轨线永远留在  $E$ ，则对所有时间

$$x_2(t) = 0.$$

于是

$$\dot{x}_1 = x_2 = 0.$$

所以  $x_1$  必须是常数。再看第二个方程：

$$\dot{x}_2 = -a \sin x_1 - bx_2.$$

在  $E$  上  $x_2 = 0$ ，且若要永远留在  $E$ ，还需要

$$\dot{x}_2 = 0.$$

因此

$$-a \sin x_1 = 0,$$

即

$$\sin x_1 = 0.$$

在原点附近，只剩

$$x_1 = 0.$$

所以最大不变集是原点，LaSalle 原理推出原点渐近稳定。

### Corollary 4.1 与 4.2

若  $V$  正定， $\dot{V} \leq 0$ ，并且  $\dot{V} = 0$  集合中的最大不变集只有原点，则原点渐近稳定。若这些条件全局成立，并且  $V$  径向无界，则原点全局渐近稳定。这里径向无界仍然承担“子水平集紧”的角色。LaSalle 需要紧的正不变集，否则正极限集可能不存在。

### 使用 LaSalle 的标准步骤

1. 找  $V$ ，证明  $V$  正定。
2. 计算  $\dot{V}$ ，证明  $\dot{V} \leq 0$ 。
3. 写出集合  $E = \{x : \dot{V} = 0\}$ 。
4. 把系统方程限制在  $E$  上，找其中能永远留在  $E$  的轨线。
5. 若最大不变集只有原点，则得到渐近稳定。

### 本节易错点

1.  $E = \{\dot{V} = 0\}$  本身不一定是 invariant 集。
2. LaSalle 看的是  $E$  中最大不变集，而不是整个  $E$ 。
3.  $\dot{V} \leq 0$  加  $E$  很小，才可能推出收敛；若  $E$  内有闭轨道，就不会收敛到原点。
4. 全局 LaSalle 需要有界性，常由径向无界子水平集提供。

### 推导补充

LaSalle 不变性原理专门处理这种情况： $\dot{V} \leq 0$ ，但  $\dot{V}$  不是负定。此时不能直接说状态趋于原点，因为  $V$  可能在某些非零点上不下降。定义集合

$$E = \{x : \dot{V}(x) = 0\}.$$

很多初学者会直接认为  $x(t) \rightarrow E$ 。更精确地说，轨线会趋近于  $E$  中最大的正不变集  $M$ 。为什么要找“最大不变集”？因为  $E$  里有些点虽然瞬时  $\dot{V} = 0$ ，但系统向量场会把它们立刻带出  $E$ 。这些点不能作为极限运动。

LaSalle 推导的关键链条是：

1.  $\dot{V} \leq 0$ ，所以  $V(x(t))$  单调不增。
2. 若轨线留在紧集内，则存在正极限集  $\omega(x_0)$ 。
3. 在正极限集上， $V$  必须为常数。理由是  $V(x(t))$  单调且有下界，所以收敛到某个  $V_\infty$ 。任何极限点  $z$  都满足  $V(z) = V_\infty$ 。
4. 若沿正极限集中的某条轨线有  $\dot{V} < 0$ ，则  $V$  会继续下降，违背它在正极限集上恒等于  $V_\infty$ 。所以正极限集必须包含在  $E$  中。
5. 正极限集本身正不变，因此它必须包含在  $E$  内的最大正不变集  $M$  中。

以有摩擦摆为例。通常选择能量函数

$$V(\theta, \omega) = mgl(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

其中  $\theta$  是角度， $\omega = \dot{\theta}$  是角速度， $J$  是转动惯量。若阻尼力矩为  $-b\omega$ ，则

$$\dot{V} = -b\omega^2 \leq 0.$$

此时

$$E = \{(\theta, \omega) : \omega = 0\}.$$

但不是所有  $\omega = 0$  的点都是不变的。若  $\omega = 0$  但  $\sin \theta \neq 0$ ，重力会产生角加速度，使  $\omega$  立刻不再为零。因此不变集还要满足

$$\dot{\omega} = 0.$$

摆方程给出

$$J\dot{\omega} = -mgl \sin \theta - b\omega.$$

在  $\omega = 0$  上，要求  $\dot{\omega} = 0$ ，得到

$$\sin \theta = 0.$$

所以最大不变集只包含平衡点。若能量子水平集排除了倒立平衡点，则轨线收敛到下垂平衡。本节学习检查：你应该能区分  $E = \{\dot{V} = 0\}$  和最大不变集  $M$ 。LaSalle 的结论是趋近  $M$ ，不是简单趋近整个  $E$ 。

## 2.3 线性系统与线性化

### 本节核心目标

本节把线性系统理论与 Lyapunov 方法连接起来，并说明怎样用线性化判断非线性系统局部稳定性。线性系统为

$$\dot{x} = Ax.$$

非线性系统在原点附近可写为

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0.$$

它的线性化是

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

### Theorem 4.5: 线性系统稳定性

线性系统

$$\dot{x} = Ax$$

的解为

$$x(t) = e^{At}x(0).$$

原点稳定，当且仅当所有特征值满足

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0,$$

并且所有实部为零的特征值对应的 Jordan 块是一阶块。原点渐近稳定，当且仅当

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall i.$$

后一个条件等价于  $A$  Hurwitz。

### 为什么 Jordan 块会导致增长

若某个零实部特征值有二阶 Jordan 块，例如

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

则

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

如果  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ ，则  $|e^{\lambda t}| = 1$ ，但矩阵中有  $t$  项，解可能线性增长。因此稳定失败。

**Lyapunov 方程**

若  $A$  Hurwitz, 则对任意  $Q = Q^T > 0$ , 存在唯一  $P = P^T > 0$ , 使

$$A^T P + PA = -Q. \quad (4.3-a)$$

取

$$V = x^T P x.$$

逐步求导:

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}.$$

代入  $\dot{x} = Ax$ :

$$\dot{V} = (Ax)^T P x + x^T P (Ax).$$

第一项转置:

$$(Ax)^T = x^T A^T.$$

所以

$$\dot{V} = x^T A^T P x + x^T P A x.$$

把  $x^T$  与  $x$  提出来:

$$\dot{V} = x^T (A^T P + PA) x.$$

由 Lyapunov 方程 (4.3-a):

$$\dot{V} = -x^T Q x < 0, \quad x \neq 0.$$

所以线性系统原点全局渐近稳定。

**P 的积分构造**

当  $A$  Hurwitz 时, 可以取

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt.$$

验证:

$$A^T P + PA = \int_0^{\infty} (A^T e^{A^T t} Q e^{A t} + e^{A^T t} Q e^{A t} A) dt.$$

因为

$$\frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{A t}) = A^T e^{A^T t} Q e^{A t} + e^{A^T t} Q e^{A t} A,$$

所以

$$A^T P + PA = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{A t}) dt.$$

积分得到

$$A^T P + PA = \left[ e^{A^T t} Q e^{At} \right]_0^\infty.$$

由于  $A$  Hurwitz,  $e^{At} \rightarrow 0$ , 故上限项为 0; 下限项为  $Q$ . 因此

$$A^T P + PA = 0 - Q = -Q.$$

#### Theorem 4.7: 非线性线性化判据

设

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0,$$

且

$$f(x) = Ax + g(x),$$

其中

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0.$$

如果  $A$  Hurwitz, 则原点局部渐近稳定。若  $A$  有某个特征值实部为正, 则原点不稳定。

#### Hurwitz 情形的推导

由于  $A$  Hurwitz, 选  $Q = I$ , 解 Lyapunov 方程

$$A^T P + PA = -I.$$

取

$$V = x^T P x.$$

沿非线性系统:

$$\dot{V} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x.$$

代入  $\dot{x} = Ax + g(x)$ :

$$\dot{V} = x^T P (Ax + g) + (Ax + g)^T P x.$$

展开:

$$\dot{V} = x^T P A x + x^T P g + x^T A^T P x + g^T P x.$$

合并线性项:

$$x^T (A^T P + PA) x = -x^T x = -\|x\|^2.$$

剩余项为

$$x^T P g + g^T P x.$$

由于这两个是标量且互为转置，和等于

$$2x^T P g.$$

取绝对值估计：

$$|2x^T P g| \leq 2\|x\| \|P\| \|g(x)\|.$$

因为  $g(x) = o(\|x\|)$ ，对任意  $\epsilon > 0$ ，存在小邻域使

$$\|g(x)\| \leq \epsilon \|x\|.$$

于是

$$\dot{V} \leq -\|x\|^2 + 2\|P\|\epsilon\|x\|^2.$$

选  $\epsilon < 1/(2\|P\|)$ ，则

$$\dot{V} \leq -c\|x\|^2$$

对某个  $c > 0$  成立。因此原点局部渐近稳定。

### 实部为正特征值时为什么不稳定

若  $A$  有不稳定模态，线性部分会沿某些方向指数增长。非线性高阶项  $g(x) = o(\|x\|)$  在足够小邻域内比线性项弱，不能抵消这个增长。严格证明可用 Chetaev 函数构造：把坐标分解为不稳定子空间和稳定/中心子空间，在不稳定方向构造一个会增加的二次型，从而证明原点不稳定。

### 临界情形不能由线性化决定

若所有特征值实部不正，但存在实部为零的特征值，线性化一般不能决定非线性系统稳定性。例如

$$\dot{x} = -x^3$$

线性化为  $\dot{x} = 0$ ，但原点渐近稳定；而

$$\dot{x} = x^3$$

线性化同样为  $\dot{x} = 0$ ，但原点不稳定。

### 本节易错点

1. Hurwitz 线性化给局部渐近稳定，不自动给全局稳定。
2. 特征值在虚轴上时，不能靠一阶线性化下结论。
3. Lyapunov 方程中的  $Q$  可自由选正定矩阵；常取  $Q = I$ 。
4.  $g(x) = o(\|x\|)$  是线性化有效性的关键。

### 推导补充

线性系统是非线性稳定性理论的局部骨架。对于

$$\dot{x} = Ax,$$

解为

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0).$$

稳定性由矩阵指数决定, 而矩阵指数由特征值和 Jordan 结构决定。若  $A$  可对角化, 且  $A = T\Lambda T^{-1}$ , 则

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}.$$

对角矩阵指数是

$$e^{\Lambda t} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}).$$

所以  $\text{Re } \lambda_i < 0$  使每项指数衰减。若有 Jordan 块

$$J = \lambda I + N,$$

其中  $N$  是上三角 nilpotent 矩阵, 满足  $N^k = 0$  对某个  $k$  成立。因为  $\lambda I$  与  $N$  可交换,

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} e^{Nt}.$$

又因为  $N^k = 0$ , 指数级数截断:

$$e^{Nt} = I + tN + \frac{t^2}{2!}N^2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^{k-1}.$$

所以 Jordan 块会带来多项式因子。如果  $\text{Re } \lambda < 0$ , 指数衰减压过多项式增长; 如果  $\text{Re } \lambda = 0$  且 Jordan 块大小大于 1, 多项式项会导致无界。Lyapunov 方程给了另一种稳定判据。若  $A$  Hurwitz, 对任意  $Q = Q^T > 0$ , 方程

$$A^T P + PA = -Q$$

存在唯一  $P = P^T > 0$ 。为什么? 构造

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt.$$

正定性: 对任意  $x \neq 0$ ,

$$x^T P x = \int_0^\infty x^T e^{A^T t} Q e^{At} x dt = \int_0^\infty (e^{At} x)^T Q (e^{At} x) dt > 0.$$

因为  $Q > 0$ , 且  $e^{At} x$  不会对所有  $t$  恒等于零。验证 Lyapunov 方程: 令

$$F(t) = e^{A^T t} Q e^{At}.$$

注意

$$\frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{At}) = A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A.$$

因此

$$A^T P + PA = \int_0^\infty (A^T F(t) + F(t)A) dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt} F(t) dt.$$

积分得到

$$A^T P + PA = F(\infty) - F(0).$$

由于  $A$  Hurwitz,  $F(\infty) = 0$ , 而  $F(0) = Q$ , 所以

$$A^T P + PA = -Q.$$

非线性线性化来自 Taylor 展开:

$$f(x) = Ax + r(x), \quad \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

若  $A$  Hurwitz, 取线性系统的 Lyapunov 函数  $V = x^T P x$ . 沿非线性系统

$$\dot{V} = x^T (A^T P + PA)x + 2x^T P r(x).$$

代入 Lyapunov 方程:

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2x^T P r(x).$$

因为  $r(x) = o(\|x\|)$ , 对足够小的  $x$ , 有

$$\|r(x)\| \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{4\|P\|} \|x\|.$$

于是

$$2|x^T P r(x)| \leq 2\|x\|\|P\|\|r(x)\| \leq \frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2.$$

同时

$$x^T Q x \geq \lambda_{\min}(Q)\|x\|^2.$$

所以

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 < 0.$$

这就是线性化稳定推出非线性局部渐近稳定的完整不等式链条。本节学习检查：你应该能从  $P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$  推出 Lyapunov 方程，并能用  $r(x) = o(\|x\|)$  控制非线性余项。

## 2.4 比较函数

### 本节核心目标

本节引入 class  $\mathcal{K}$ 、 $\mathcal{K}_\infty$ 、 $\mathcal{KL}$  函数，用统一语言描述稳定性估计。它们不是为了形式主义，而是为了把“初值越小，状态越小”和“状态随时间衰减”写成可组合、可比较的函数不等式。

**Class K 函数**

函数

$$\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$$

属于 class  $\mathcal{K}$ , 若:

1.  $\alpha$  连续;
2.  $\alpha(0) = 0$ ;
3.  $\alpha$  严格递增。

严格递增意味着: 若  $r_2 > r_1$ , 则

$$\alpha(r_2) > \alpha(r_1).$$

例如  $\alpha(r) = r$ 、 $\alpha(r) = r^2$ 、 $\alpha(r) = \frac{r}{1+r}$  都属于  $\mathcal{K}$ 。**Class  $\mathcal{K}_\infty$  函数**若  $\alpha \in \mathcal{K}$ , 定义域为  $[0, \infty)$ , 并且

$$\alpha(r) \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty,$$

则  $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ 。例如  $r^2$  属于  $\mathcal{K}_\infty$ , 但  $r/(1+r)$  不属于, 因为它趋向 1。**Class  $\mathcal{KL}$  函数**

函数

$$\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

属于  $\mathcal{KL}$ , 若:

1. 对每个固定  $s \geq 0$ ,  $\beta(\cdot, s) \in \mathcal{K}$ ;
2. 对每个固定  $r$ ,  $\beta(r, s)$  随  $s$  增大而下降到 0。

典型例子:

$$\beta(r, s) = kre^{-\lambda s}, \quad k > 0, \lambda > 0.$$

对固定  $s$ , 它对  $r$  是线性 class  $\mathcal{K}$ ; 对固定  $r$ , 它随  $s \rightarrow \infty$  指数衰减到 0。**用 K 函数夹逼 Lyapunov 函数**若  $V$  正定且连续, 在原点附近可以找  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$ , 使

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|). \quad (4.4-a)$$

若  $V$  径向无界, 则可以在全局找  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ 。对二次型  $V = x^T P x$ , 这个夹逼具体就是

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2.$$

因此可以选

$$\alpha_1(r) = \lambda_{\min}(P)r^2, \quad \alpha_2(r) = \lambda_{\max}(P)r^2.$$

## 由 Lyapunov 不等式推出 KL 估计

假设

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

且

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|).$$

我们希望得到

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t).$$

第 1 步：由上界  $V \leq \alpha_2(\|x\|)$  可得

$$\alpha_2^{-1}(V) \leq \|x\|.$$

第 2 步：因为  $\alpha_3$  递增，

$$\alpha_3(\|x\|) \geq \alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)).$$

第 3 步：代入  $\dot{V}$  不等式：

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)).$$

定义

$$\rho(s) = \alpha_3(\alpha_2^{-1}(s)).$$

则

$$\dot{V} \leq -\rho(V).$$

这是标量比较不等式。由比较引理，存在  $\sigma \in \mathcal{KL}$ ，使

$$V(t) \leq \sigma(V(0), t).$$

第 4 步：用下界  $\alpha_1(\|x\|) \leq V$ ：

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(V(t)).$$

第 5 步：用  $V(0) \leq \alpha_2(\|x(0)\|)$ ：

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(\|x(0)\|), t)).$$

因此

$$\beta(r, t) = \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(r), t))$$

就是一个  $\mathcal{KL}$  上界。

**本节易错点**

1.  $\mathcal{K}$  函数是“幅值变换”， $\mathcal{KL}$  函数是“幅值加时间衰减”。
2.  $\mathcal{K}_\infty$  常对应全局性质，因为它能处理  $\|x\| \rightarrow \infty$ 。
3. 用  $\alpha_1^{-1}$ 、 $\alpha_2^{-1}$  时必须注意函数严格递增，才有反函数。

**推导补充**

Comparison functions 的作用是把“局部、全局、一致、渐近、指数”等稳定性全部写成统一的函数估计。Class  $\mathcal{K}$  函数  $\alpha$  满足：

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(r) > 0 \ (r > 0), \quad \alpha \text{ 严格递增.}$$

因此  $\alpha(\|x\|)$  是一种合法的“状态大小刻度”。Class  $\mathcal{K}_\infty$  还要求

$$\alpha(r) \rightarrow \infty \ (r \rightarrow \infty),$$

它适合表达全局性质，因为状态越大，刻度也无限变大。Class  $\mathcal{KL}$  函数  $\beta(r, t)$  对第一个变量是  $\mathcal{K}$ ，对第二个变量随时间衰减到零：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(r, t) = 0.$$

所以稳定估计常写成

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0).$$

从 Lyapunov 不等式推出  $\mathcal{KL}$  估计的标准链条如下。假设

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

并且

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|).$$

先用  $V \leq \alpha_2(\|x\|)$  说明初始能量可由初始状态控制：

$$V(x(t_0)) \leq \alpha_2(\|x(t_0)\|).$$

再用  $\alpha_1(\|x\|) \leq V(x)$ ，得到

$$\|x\| \leq \alpha_1^{-1}(V(x)).$$

为了把  $\dot{V}$  写成  $V$  的函数，需要把  $\|x\|$  下界成  $V$  的函数。由

$$V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

可得

$$\alpha_2^{-1}(V(x)) \leq \|x\|.$$

因为  $\alpha_3$  递增，

$$\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V(x))) \leq \alpha_3(\|x\|).$$

所以

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)).$$

这变成标量比较方程

$$\dot{y} = -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(y)), \quad y(t_0) = V(x(t_0)).$$

该标量方程的解给出某个  $\mathcal{KL}$  函数  $\sigma$ ：

$$V(x(t)) \leq \sigma(V(x(t_0)), t - t_0).$$

最后代回状态：

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(V(x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(\|x(t_0)\|), t - t_0)).$$

于是

$$\beta(r, t) = \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(r), t))$$

就是所需的  $\mathcal{KL}$  上界。指数稳定是特殊情况。若

$$c_1\|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2\|x\|^2, \quad \dot{V} \leq -c_3\|x\|^2,$$

由  $V \leq c_2\|x\|^2$  得

$$\|x\|^2 \geq \frac{V}{c_2}.$$

因此

$$\dot{V} \leq -c_3 \frac{V}{c_2} = -\frac{c_3}{c_2} V.$$

比较得

$$V(t) \leq V(t_0) e^{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)}.$$

再由  $c_1\|x(t)\|^2 \leq V(t)$  和  $V(t_0) \leq c_2\|x(t_0)\|^2$ ,

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} e^{-\frac{c_3}{2c_2}(t-t_0)} \|x(t_0)\|.$$

本节学习检查：你应该能熟练在  $V$ 、 $\|x\|$ 、 $\alpha_i$  之间来回转换，并知道什么时候要用  $\alpha_1^{-1}$ ，什么时候要用  $\alpha_2^{-1}$ 。

## 2.5 非自治系统

### 本节核心目标

本节研究非自治系统

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0.$$

非自治的困难是：系统规律随时间变。稳定半径和收敛时间可能依赖初始时刻  $t_0$ 。因此需要引入“一致”稳定性。

**为什么  $t_0$  重要**

自治系统中，若从  $t_0$  开始，解只依赖时间差  $t - t_0$ 。非自治系统中， $f$  显含  $t$ ，所以从不同初始时刻出发可能遇到完全不同的系统强度。

例如

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+t}.$$

从  $t_0$  出发：

$$\frac{\dot{x}}{x} = -\frac{1}{1+t}.$$

积分：

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{\xi} d\xi = -\int_{t_0}^t \frac{1}{1+s} ds.$$

左边为

$$\ln |x(t)| - \ln |x(t_0)|.$$

右边为

$$-[\ln(1+s)]_{t_0}^t = -\ln(1+t) + \ln(1+t_0).$$

所以

$$\ln \frac{|x(t)|}{|x(t_0)|} = \ln \frac{1+t_0}{1+t}.$$

指数化：

$$|x(t)| = |x(t_0)| \frac{1+t_0}{1+t}.$$

固定  $t_0$  时会收敛到 0；但若  $t_0$  很大，经过同样长的时间  $T$ ，比例

$$\frac{1+t_0}{1+t_0+T}$$

接近 1，衰减很慢。因此收敛速度不能对所有  $t_0$  统一。

**一致稳定与一致渐近稳定**

一致稳定要求：对每个  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta(\varepsilon) > 0$ ，使

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

关键是  $\delta$  不依赖  $t_0$ 。一致渐近稳定要求：一致稳定，并且存在  $c > 0$ ，使得对任意  $\eta > 0$ ，存在  $T(\eta) > 0$ ，满足

$$\|x(t_0)\| < c \Rightarrow \|x(t)\| < \eta, \quad t \geq t_0 + T(\eta).$$

关键是收敛时间  $T$  不依赖  $t_0$ 。指数稳定要求存在  $k, \lambda > 0$ ，使

$$\|x(t)\| \leq k \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

**Theorem 4.8: 非自治 Lyapunov 一致稳定**

若存在  $V(t, x)$ , 满足

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x),$$

其中  $W_1, W_2$  正定且不依赖  $t$ , 并且

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0,$$

则原点一致稳定。这里上界  $V(t, x) \leq W_2(x)$  称为 decrescent 条件。它防止 Lyapunov 函数的尺度随时间漂移, 否则  $V$  小不一定代表  $x$  小。

**Theorem 4.9: 一致渐近稳定**

若在 Theorem 4.8 基础上还有

$$\dot{V}(t, x) \leq -W_3(x),$$

其中  $W_3$  正定, 则原点一致渐近稳定。推导思路与 4.4 节一致: 由

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

和

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

推出

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0),$$

其中  $\beta \in \mathcal{KL}$ 。右端只依赖  $t - t_0$ , 所以是“一致”的。

**Theorem 4.10: 指数稳定的逐步推导**

若存在常数  $c_1, c_2, c_3, a > 0$ , 使

$$c_1\|x\|^a \leq V(t, x) \leq c_2\|x\|^a,$$

且

$$\dot{V} \leq -c_3\|x\|^a,$$

则由上界

$$V \leq c_2\|x\|^a$$

得到

$$\|x\|^a \geq \frac{V}{c_2}.$$

代入导数不等式:

$$\dot{V} \leq -c_3 \frac{V}{c_2} = -\frac{c_3}{c_2} V.$$

比较方程为

$$\dot{u} = -\frac{c_3}{c_2}u.$$

解为

$$u(t) = u(t_0)e^{-(c_3/c_2)(t-t_0)}.$$

因此

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0))e^{-(c_3/c_2)(t-t_0)}.$$

再用

$$V(t_0, x(t_0)) \leq c_2 \|x(t_0)\|^a$$

和

$$c_1 \|x(t)\|^a \leq V(t, x(t)),$$

得到

$$c_1 \|x(t)\|^a \leq c_2 \|x(t_0)\|^a e^{-(c_3/c_2)(t-t_0)}.$$

两边除以  $c_1$ ：

$$\|x(t)\|^a \leq \frac{c_2}{c_1} \|x(t_0)\|^a e^{-(c_3/c_2)(t-t_0)}.$$

取  $a$  次方根：

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1/a} \|x(t_0)\| e^{-(c_3/(ac_2))(t-t_0)}.$$

这就是指数稳定。

### 本节易错点

1. 非自治系统中，渐近稳定不一定一致渐近稳定。
2.  $V(t, x)$  正定还不够，还需要不依赖  $t$  的上下界。
3. 指数稳定给出最强的显式收敛速率估计。

### 推导补充

非自治系统写作

$$\dot{x} = f(t, x).$$

这里右端显式依赖时间，所以稳定性必须关注初始时间  $t_0$ 。同一个初始状态大小，若从不同  $t_0$  出发，系统可能表现不同。因此“一致”二字非常重要。非一致稳定允许  $\delta$  依赖  $t_0$ ：

$$\delta = \delta(\epsilon, t_0).$$

一致稳定要求

$$\delta = \delta(\epsilon),$$

不依赖初始时间。这在工程上意味着控制器对任意启动时间都有同样稳定裕度。非自治 Lyapunov 函数写成  $V(t, x)$ 。沿轨线导数要用全导数：

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x)f(t, x).$$

注意第一项  $\partial V/\partial t$  不能漏掉。若有

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

且这两个界与  $t$  无关，同时

$$\dot{V}(t, x) \leq 0,$$

则得到一致稳定。原因和自治情形相似，但关键是上下界不能随  $t$  漂移。否则你无法选一个对所有  $t_0$  都有效的  $\delta$ 。若进一步

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|),$$

且  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与  $t$  无关，则可以通过比较函数得到一致渐近稳定。若是二次型指数条件：

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2\|x\|^2,$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3\|x\|^2,$$

其中  $c_1, c_2, c_3 > 0$  是常数，则推导指数界：由上界  $V \leq c_2\|x\|^2$  得

$$\|x\|^2 \geq \frac{V}{c_2}.$$

代入导数不等式：

$$\dot{V} \leq -c_3\|x\|^2 \leq -\frac{c_3}{c_2}V.$$

所以

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0))e^{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)}.$$

由下界  $c_1\|x(t)\|^2 \leq V(t, x(t))$  和初始上界  $V(t_0, x(t_0)) \leq c_2\|x(t_0)\|^2$ ，得到

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}e^{-\frac{c_3}{2c_2}(t-t_0)}\|x(t_0)\|.$$

这正是一致指数稳定估计，因为系数与  $t_0$  无关。本节学习检查：你应该能解释为什么非自治系统中“上下界与  $t$  无关”比形式上的  $\dot{V} \leq 0$  更关键。

## 2.6 线性时变系统与线性化

### 本节核心目标

本节研究线性时变系统

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (4.6-a)$$

以及非自治非线性系统

$$\dot{x} = f(t, x)$$

的线性化。关键思想是：LTI 系统看特征值，LTV 系统不能只看每个瞬时  $A(t)$  的特征值，而要看状态转移矩阵。

### 状态转移矩阵

线性时变系统的解写成

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0),$$

其中  $\Phi(t, t_0)$  是状态转移矩阵，满足

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I.$$

如果  $A(t) = A$  常数，则

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

### Theorem 4.11: LTV 一致渐近稳定等价于指数界

对线性时变系统，原点全局一致渐近稳定当且仅当存在  $k, \lambda > 0$ ，使

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq ke^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

这说明：在线性时变系统中，一致渐近稳定自动升级为指数稳定。

### 为什么不能只看 $A(t)$ 的瞬时特征值

LTI 系统中， $A$  的特征向量固定，模态不会随时间旋转。LTV 系统中，即使每个时刻  $A(t)$  的特征值都在左半平面，特征方向也可能快速变化，持续把能量从衰减方向转移到增长方向。因此稳定性必须看整体状态转移矩阵，而不是逐点特征值。

### Theorem 4.12: LTV Lyapunov 方程

若系统指数稳定，且  $A(t)$  连续有界，则对任意连续、有界、对称正定  $Q(t)$ ，存在有界、对称正定  $P(t)$ ，满足

$$-\dot{P} = PA + A^T P + Q. \quad (4.6-b)$$

取

$$V(t, x) = x^T P(t)x.$$

逐步求导：

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T \dot{P} x + x^T P \dot{x}.$$

代入  $\dot{x} = Ax$ ：

$$\dot{V} = (Ax)^T Px + x^T \dot{P}x + x^T P Ax.$$

第一项化为

$$(Ax)^T Px = x^T A^T P x.$$

所以

$$\dot{V} = x^T (A^T P + \dot{P} + P A)x.$$

由 (4.6-b)，

$$\dot{P} + P A + A^T P = -Q.$$

因此

$$\dot{V} = -x^T Q(t)x < 0.$$

于是  $V$  是 LTV 系统的 Lyapunov 函数。

### **P(t) 的积分表达**

可构造

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau.$$

这个公式的直觉是： $P(t)$  衡量从当前状态出发，未来所有时间的加权能量。若系统指数稳定，未来能量积分有限，所以  $P(t)$  有界。

### **非自治非线性系统线性化**

设

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0.$$

线性化为

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|_{x=0}.$$

写成

$$f(t, x) = A(t)x + g(t, x).$$

若 Jacobian 对  $x$  一致 Lipschitz，则可得二阶余项界

$$\|g(t, x)\| \leq L\|x\|^2$$

在小邻域成立。

**Theorem 4.13: 时变线性化定理**

若线性化系统  $\dot{x} = A(t)x$  原点指数稳定，且 Jacobian 有界并一致 Lipschitz，则非线性系统原点指数稳定。推导结构如下：

1. 由 Theorem 4.12，线性化系统存在二次型 Lyapunov 函数

$$V = x^T P(t)x.$$

2. 在线性系统上

$$\dot{V} \leq -c\|x\|^2.$$

3. 对非线性系统，多出余项  $g(t, x)$ 。沿非线性系统：

$$\dot{V} = \dot{V}_{\text{linear}} + 2x^T P(t)g(t, x).$$

4. 估计余项：

$$|2x^T P g| \leq 2\|x\| \|P(t)\| \|g(t, x)\|.$$

若  $\|P(t)\| \leq p$ ，且  $\|g(t, x)\| \leq L\|x\|^2$ ，则

$$|2x^T P g| \leq 2pL\|x\|^3.$$

5. 在足够小邻域中， $2pL\|x\|^3 \leq \frac{c}{2}\|x\|^2$ 。于是

$$\dot{V} \leq -\frac{c}{2}\|x\|^2.$$

再用 Theorem 4.10 得到指数稳定。

**本节易错点**

1. LTV 系统不能只看瞬时特征值。
2.  $P(t)$  是时变矩阵，Lyapunov 方程里有  $\dot{P}$ 。
3. 非自治线性化需要一致条件，否则稳定半径可能随时间退化。

**推导补充**

线性时变系统写作

$$\dot{x} = A(t)x.$$

它的解不能简单写成  $e^{\int A(t)dt}$ ，因为不同时刻的矩阵通常不交换。正确工具是状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0)$ ，满足

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I.$$

解为

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0).$$

一致指数稳定等价于存在常数  $k \geq 1, \alpha > 0$ ，使

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq k e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

为什么不能只看  $A(t)$  的瞬时特征值？因为时变系统的状态方向会随时间旋转，短时间内的非正规放大和矩阵不交换效应可能积累。瞬时每个  $A(t)$  都 Hurwitz 并不自动推出整体稳定。

LTV Lyapunov 方程通常写成

$$-\dot{P}(t) = A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + Q(t).$$

等价地，

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) = -Q(t).$$

若系统一致指数稳定，可以构造

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi^T(s, t)Q(s)\Phi(s, t)ds.$$

验证导数时要小心上下限也依赖  $t$ 。直觉上， $P(t)$  是从当前时间  $t$  开始，未来状态能量的总成本。对非线性时变系统

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0,$$

线性化为

$$\dot{z} = A(t)z, \quad A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0).$$

Taylor 展开给出

$$f(t, x) = A(t)x + r(t, x),$$

其中余项满足在一致意义下

$$\frac{\|r(t, x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \quad (\|x\| \rightarrow 0).$$

一致性很重要：这个极限不能依赖某个特别的  $t$ ，否则无法得到对所有初始时间都有效的局部稳定结论。

若线性时变系统一致指数稳定，就存在  $P(t)$  满足一致二次界

$$c_1\|x\|^2 \leq x^T P(t)x \leq c_2\|x\|^2.$$

取

$$V(t, x) = x^T P(t)x.$$

沿非线性系统求导：

$$\dot{V} = x^T \dot{P}x + 2x^T P(t)f(t, x).$$

代入  $f = A(t)x + r(t, x)$ ：

$$\dot{V} = x^T \dot{P}x + 2x^T P A x + 2x^T P r.$$

因为标量  $x^T P A x$  等于其转置  $x^T A^T P x$ ，所以

$$2x^T P A x = x^T (P A + A^T P)x.$$

于是

$$\dot{V} = x^T (\dot{P} + A^T P + P A)x + 2x^T P r.$$

由 Lyapunov 方程，第一项为

$$-x^T Q x.$$

余项按范数控制：

$$2|x^T P r| \leq 2\|x\| \|P\| \|r\|.$$

当  $x$  足够小时，让

$$\|r(t, x)\| \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{4 \sup_t \|P(t)\|} \|x\|.$$

则

$$2|x^T P r| \leq \frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|x\|^2.$$

最终

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|x\|^2.$$

得到非线性系统局部一致指数稳定。本节学习检查：你应该能写出状态转移矩阵定义，并能说明 LTV 线性化定理中“余项一致小”为什么不可省略。

## 2.7 逆 Lyapunov 定理

### 本节核心目标

前面定理是“若能找到 Lyapunov 函数，则可证明稳定”。逆定理问：如果系统已经稳定，是否一定存在 Lyapunov 函数？答案在常见条件下是肯定的。逆定理的意义不是让你直接构造  $V$ ，而是说明 Lyapunov 方法在理论上没有本质缺口。

#### Theorem 4.14: 指数稳定逆定理

若非自治系统原点指数稳定，并且  $f$  足够光滑、Jacobian 有界，则存在  $V(t, x)$ ，使

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2,$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2,$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|.$$

这些正好是指数稳定 Lyapunov 定理需要的条件。

**构造思想：未来能量**

一个典型构造是

$$V(t, x) = \int_t^{\infty} \|\phi(\tau; t, x)\|^2 d\tau,$$

其中  $\phi(\tau; t, x)$  表示从时间  $t$ 、状态  $x$  出发，到时间  $\tau$  的解。  
若系统指数稳定，则

$$\|\phi(\tau; t, x)\| \leq k\|x\|e^{-\lambda(\tau-t)}.$$

于是

$$V(t, x) \leq \int_t^{\infty} k^2\|x\|^2 e^{-2\lambda(\tau-t)} d\tau.$$

令  $s = \tau - t$ ，则

$$V(t, x) \leq k^2\|x\|^2 \int_0^{\infty} e^{-2\lambda s} ds.$$

积分为

$$\int_0^{\infty} e^{-2\lambda s} ds = \frac{1}{2\lambda}.$$

所以

$$V(t, x) \leq \frac{k^2}{2\lambda}\|x\|^2.$$

这解释了为什么  $V$  会与  $\|x\|^2$  同阶。

**Theorem 4.15: 非线性指数稳定与线性化指数稳定**

在适当一致 Lipschitz 条件下，非线性系统原点指数稳定，当且仅当线性化系统原点指数稳定。“线性化指数稳定  $\Rightarrow$  非线性指数稳定”就是 Theorem 4.13。“非线性指数稳定  $\Rightarrow$  线性化指数稳定”的思路：

1. 由 Theorem 4.14，非线性系统存在指数型 Lyapunov 函数  $V$ 。
2. 把线性化系统写成非线性系统减去高阶项：

$$A(t)x = f(t, x) - g(t, x).$$

3. 沿线性系统计算  $\dot{V}$ ，比沿非线性系统多出一个  $-g$  相关项。
4. 因为  $g = O(\|x\|^2)$ ，在小邻域中它不破坏  $\dot{V} \leq -c\|x\|^2$ 。
5. 因此线性化系统也指数稳定。

**渐近稳定不等于指数稳定**

系统

$$\dot{x} = -x^3$$

原点渐近稳定，但不是指数稳定。求解：

$$\frac{dx}{dt} = -x^3.$$

分离变量：

$$x^{-3} dx = -dt.$$

积分：

$$\int x^{-3} dx = \int -dt.$$

左边：

$$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}.$$

所以

$$-\frac{1}{2x^2} = -t + C.$$

等价于

$$\frac{1}{x^2} = 2t + C_1.$$

若  $x(0) = x_0$ ，则  $C_1 = 1/x_0^2$ 。因此

$$|x(t)| = \frac{|x_0|}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}}.$$

这是多项式速度衰减，不是指数速度。线性化为  $\dot{x} = 0$ ，矩阵  $A = 0$  不是 Hurwitz。

### Theorem 4.16 与 4.17

**Theorem 4.16:** 若非自治系统一致渐近稳定，则存在  $V(t, x)$ ，被  $\mathcal{K}$  函数上下夹逼，并且导数负定。

**Theorem 4.17:** 若自治系统原点渐近稳定，则在吸引域内存在光滑 Lyapunov 函数。更重要的是，当  $x$  接近吸引域边界时， $V(x) \rightarrow \infty$ 。这说明 Lyapunov 函数不仅描述局部稳定，还能编码吸引域边界。

### 本节易错点

1. 逆定理保证存在，不等于给出简单公式。
2. 渐近稳定不一定指数稳定。
3. 线性化 Hurwitz 与非线性局部指数稳定等价；但虚轴情形仍需高阶分析。

### 推导补充

逆定理回答的问题是：如果系统已经稳定，是否一定存在 Lyapunov 函数？正向定理是“有  $V$  推出稳定”；逆定理是“稳定推出某种  $V$  存在”。这让 Lyapunov 方法不只是充分工具，也在很多条件下接近必要工具。指数稳定时，一个典型构造是“未来能量”：

$$V(t, x) = \int_t^\infty \|\phi(s; t, x)\|^2 ds,$$

其中  $\phi(s; t, x)$  表示从时间  $t$ 、状态  $x$  出发，在时间  $s$  的状态。为什么这个积分有限？若系统指数稳定，存在

$$\|\phi(s; t, x)\| \leq k e^{-\alpha(s-t)} \|x\|.$$

平方后：

$$\|\phi(s; t, x)\|^2 \leq k^2 e^{-2\alpha(s-t)} \|x\|^2.$$

积分：

$$V(t, x) \leq \int_t^\infty k^2 e^{-2\alpha(s-t)} \|x\|^2 ds.$$

令  $\tau = s - t$ ，得到

$$V(t, x) \leq k^2 \|x\|^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha\tau} d\tau = \frac{k^2}{2\alpha} \|x\|^2.$$

下界通常由短时间连续性得到：未来轨线在很短时间内不会马上消失，所以  $V$  至少和  $\|x\|^2$  同阶。更漂亮的是导数。沿系统轨线，若从  $(t, x)$  出发并走到  $(t+h, \phi(t+h; t, x))$ ，则未来能量少掉了最前面一小段：

$$V(t+h, \phi(t+h; t, x)) = \int_{t+h}^\infty \|\phi(s; t, x)\|^2 ds.$$

而

$$V(t, x) = \int_t^{t+h} \|\phi(s; t, x)\|^2 ds + \int_{t+h}^\infty \|\phi(s; t, x)\|^2 ds.$$

两式相减：

$$V(t+h, \phi(t+h; t, x)) - V(t, x) = - \int_t^{t+h} \|\phi(s; t, x)\|^2 ds.$$

除以  $h$ ，令  $h \rightarrow 0^+$ ：

$$\dot{V}(t, x) = -\|x\|^2.$$

这解释了为什么逆定理里的 Lyapunov 函数往往天然带有负定导数。逆定理的意义不是让你在实际题目中总去计算这个积分，而是提供理论保证：如果系统确实指数稳定，那么一定存在一个足够光滑、二次夹逼、导数负定的 Lyapunov 函数。控制设计里很多“找不到 Lyapunov 函数”只是人的技巧问题，不代表函数不存在。本节学习检查：你应该能解释未来能量函数为什么正定、为什么有上界、以及为什么沿轨线导数等于负的当前能量。

## 2.8 有界性与最终有界性

### 本节核心目标

很多系统有持续外部扰动或周期输入，不一定收敛到原点。这时我们关心：状态是否有界，是否最终进入某个球。系统形式为

$$\dot{x} = f(t, x).$$

**一致有界**

解一致有界，意思是：对任意初值半径  $a > 0$ ，存在  $b(a) > 0$ ，使

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b(a), \quad t \geq t_0.$$

这里  $b$  不依赖  $t_0$ ，所以是“一致”的。

**一致最终有界**

解一致最终有界，意思是：存在最终半径  $b > 0$ ，使对每个初值界  $a$ ，存在时间  $T(a, b)$ ，满足

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad t \geq t_0 + T.$$

也就是说，初始状态可以很大，但经过足够长时间后会进入同一个最终球。

**Theorem 4.18: Lyapunov 最终有界定理**

假设存在  $V(t, x)$ ，使

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

并且在球外

$$\dot{V}(t, x) \leq -W_3(x), \quad \|x\| \geq \mu,$$

其中  $\mu > 0$ 。这表示状态足够大时，能量一定下降。于是轨线不能无限增大，最终会进入由  $\mu$  决定的球附近。

**最终界的推导**

如果  $\|x\| \geq \mu$ ，则  $\dot{V} \leq -W_3(x) < 0$ 。所以当轨线在球外时， $V$  单调下降。

一旦  $V$  降到

$$V \leq \alpha_2(\mu),$$

由下界

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V$$

得到

$$\alpha_1(\|x\|) \leq \alpha_2(\mu).$$

由于  $\alpha_1$  严格递增，取反函数：

$$\|x\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)).$$

因此最终界为

$$B = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)).$$

**Duffing 型受迫系统的推导结构**

考虑

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -(1 + x_1^2)x_1 - x_2 + M \cos \omega t.$$

当  $M = 0$  时，可用能量函数证明全局渐近稳定。当  $M > 0$  时，沿同一 Lyapunov 函数会出现扰动项，典型估计形如

$$\dot{V} \leq -\|x\|^2 + cM\|x\|.$$

把负项拆成

$$-\|x\|^2 = -(1 - \theta)\|x\|^2 - \theta\|x\|^2, \quad 0 < \theta < 1.$$

于是

$$\dot{V} \leq -(1 - \theta)\|x\|^2 + [-\theta\|x\|^2 + cM\|x\|].$$

若

$$\theta\|x\|^2 \geq cM\|x\|,$$

且  $\|x\| > 0$ ，两边除以  $\|x\|$ ：

$$\theta\|x\| \geq cM.$$

也就是

$$\|x\| \geq \frac{cM}{\theta}.$$

在这个球外，方括号非正，所以

$$\dot{V} \leq -(1 - \theta)\|x\|^2 < 0.$$

因此系统最终有界，最终界随扰动幅值  $M$  增大。

**本节易错点**

1. 最终有界不是收敛到原点。
2.  $\dot{V}$  只需在大状态区域为负，不必全空间负定。
3. 最终界通常和扰动大小成正相关。

**推导补充**

有界性和最终有界性处理的是“系统可能不收敛到原点，但是否会被限制在某个区域内”。这对受扰系统非常重要。典型 Lyapunov 条件是：当状态足够大时， $V$  下降。比如

$$\dot{V} \leq -aV + b, \quad a > 0, \quad b \geq 0.$$

一步一步解这个不等式。比较方程为

$$\dot{z} = -az + b, \quad z(t_0) = V(t_0).$$

写成

$$\dot{z} + az = b.$$

乘以积分因子  $e^{at}$ ：

$$e^{at}\dot{z} + ae^{at}z = be^{at}.$$

左边正好是

$$\frac{d}{dt}(e^{at}z) = be^{at}.$$

从  $t_0$  积分到  $t$ ：

$$e^{at}z(t) - e^{at_0}z(t_0) = \int_{t_0}^t be^{as} ds = \frac{b}{a}(e^{at} - e^{at_0}).$$

所以

$$z(t) = z(t_0)e^{-a(t-t_0)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-t_0)}).$$

由比较原理

$$V(t) \leq V(t_0)e^{-a(t-t_0)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-t_0)}).$$

当  $t \rightarrow \infty$ ，第一项衰减到零，第二项趋向  $b/a$ 。因此最终有界半径来自  $V \leq b/a$  对应的状态集合。

更一般地，若

$$\dot{V} \leq -W(x)$$

只在  $\|x\| \geq R$  时成立，那么轨线一旦离开半径  $R$  外，能量就下降；它可能在边界附近徘徊，但不能无限远离。这就是吸收集的直觉。Duffing 型受迫系统常出现这种推导：非线性刚度项产生高阶正能量，阻尼提供负耗散，外力项通过 Young 不等式分解。例如交叉项

$$|xy| \leq \frac{\epsilon}{2}x^2 + \frac{1}{2\epsilon}y^2.$$

这个不等式的作用是把“状态乘扰动”拆成一部分可被负定项吸收的状态项，另一部分变成常数或输入幅值项。最终得到  $\dot{V} \leq -aV + b$  或类似形式。

本节学习检查：你应该能从  $\dot{V} \leq -aV + b$  完整解出最终界，并能解释  $b/a$  为什么决定最终残余大小。

## 2.9 输入到状态稳定性

### 本节核心目标

本节研究有输入系统

$$\dot{x} = f(t, x, u),$$

其中  $u(t)$  是外部输入、扰动或控制误差。ISS 的目标是建立状态界：状态由初值影响和输入大小共同决定。

### ISS 定义

系统 input-to-state stable, 若存在  $\beta \in \mathcal{KL}$  和  $\gamma \in \mathcal{K}$ , 使

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\| \right). \quad (4.9-a)$$

第一项是初值影响, 随时间衰减。第二项是输入影响, 输入越小, 状态最终越小。若  $u \equiv 0$ , 则

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0),$$

即无输入系统渐近稳定。

### ISS-Lyapunov 条件

若存在  $V(t, x)$ , 满足

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

且当状态比输入影响大时,

$$\|x\| \geq \rho(\|u\|) \Rightarrow \dot{V} \leq -W(x),$$

其中  $W$  正定, 则系统 ISS。直觉: 输入允许状态有一个“扰动层”。只要状态大到超过输入造成的合理范围, Lyapunov 函数就下降, 把状态拉回去。

### 由导数不等式得到最终界

设

$$\|u\|_\infty = \bar{u}.$$

当

$$\|x\| \geq \rho(\bar{u}),$$

有

$$\dot{V} \leq -W(x) < 0.$$

这和第 4.8 节完全类似, 因此状态最终进入半径大致为

$$\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\rho(\bar{u}))).$$

这就是 ISS 中  $\gamma(\bar{u})$  的来源。

**常用等价形式**

很多时候导数条件写作

$$\dot{V} \leq -\alpha(\|x\|) + \sigma(\|u\|). \quad (4.9-b)$$

若  $\alpha(\|x\|) \geq 2\sigma(\|u\|)$ , 则

$$-\alpha(\|x\|) + \sigma(\|u\|) \leq -\frac{1}{2}\alpha(\|x\|).$$

所以当

$$\|x\| \geq \alpha^{-1}(2\sigma(\|u\|))$$

时,  $\dot{V}$  为负。于是可取

$$\rho(r) = \alpha^{-1}(2\sigma(r)).$$

**Example 结构：用  $V = x^2/2$  判断 ISS**

若标量系统

$$\dot{x} = -x^3 + u,$$

取

$$V = \frac{1}{2}x^2.$$

求导：

$$\dot{V} = x\dot{x} = x(-x^3 + u) = -x^4 + xu.$$

用 Young 不等式。对任意  $\epsilon > 0$ ,

$$|xu| \leq \frac{\epsilon}{4}x^4 + C_\epsilon|u|^{4/3}.$$

取  $\epsilon = 2$ , 得到某个常数  $c > 0$ , 使

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}x^4 + c|u|^{4/3}.$$

这正是 (4.9-b) 形式, 因此系统 ISS。

**本节易错点**

1. ISS 不是说有输入时状态收敛到 0, 而是说最终界由输入幅值决定。
2. 输入为零时, ISS 退化为无输入渐近稳定。
3. ISS 是非线性鲁棒稳定的核心语言, 第 5 章的输入输出稳定会继续用到它。

**推导补充**

ISS 的核心句子是：没有输入时状态收敛；有有界输入时状态最终被输入大小限制。标准估计是

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma(\|u\|_\infty).$$

这里  $\beta$  描述初始条件影响的衰减,  $\gamma$  描述输入造成的残余影响。ISS-Lyapunov 条件常写成: 若

$$\|x\| \geq \rho(\|u\|)$$

则

$$\dot{V} \leq -\alpha(\|x\|).$$

这句话的含义是: 状态比输入能解释的范围还大时, 系统必须下降。反过来说, 只有当状态进入由输入大小决定的区域时,  $\dot{V}$  才允许不严格下降。以一维系统为例:

$$\dot{x} = -x + x^2 u.$$

取

$$V = \frac{1}{2}x^2.$$

则

$$\dot{V} = x\dot{x} = x(-x + x^2 u) = -x^2 + x^3 u.$$

对输入项取绝对值上界:

$$x^3 u \leq |x|^3 |u|.$$

所以

$$\dot{V} \leq -x^2 + |x|^3 |u| = -x^2(1 - |x||u|).$$

若

$$|x||u| \leq \frac{1}{2},$$

即

$$|x| \leq \frac{1}{2|u|}$$

时下降。这个形式不太像 ISS, 因为输入越大允许的状态越小, 说明这个系统对大输入可能不具备全局 ISS。这个例子提醒我们: ISS 不只是“有阻尼”, 还要看输入如何进入系统。如果输入乘上高阶状态, 可能导致大状态处被输入放大。更标准的系统

$$\dot{x} = -x + u$$

取同样的  $V = \frac{1}{2}x^2$ :

$$\dot{V} = x(-x + u) = -x^2 + xu.$$

用 Young 不等式

$$|xu| \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}u^2.$$

得到

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}u^2.$$

若  $|x| \geq 2|u|$ , 则  $u^2 \leq x^2/4$ , 于是

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^2 = -\frac{3}{8}x^2.$$

所以当状态超过输入的两倍量级时, 能量下降, 系统是 ISS。本节学习检查: 你应该能把输入交叉项用 Young 不等式处理, 并能读懂  $\|x\| \geq \rho(\|u\|) \Rightarrow \dot{V} < 0$  的工程含义。

## 2.10 本章习题与训练

### 本节核心目标

第 4 章习题训练的是 Lyapunov 分析的完整 workflow:

1. 给定系统找正定函数。
2. 计算  $\dot{V}$ , 判断负定、半负定还是不定。
3. 半负定时使用 LaSalle。
4. 对线性系统解 Lyapunov 方程。
5. 对非线性系统做线性化判别。
6. 对时变系统判断一致稳定。
7. 对有输入系统建立最终有界或 ISS。

### 代表题型 1: 二次 Lyapunov 函数

若系统

$$\dot{x} = Ax$$

且  $A$  Hurwitz, 习题常要求用

$$V = x^T P x$$

证明稳定。标准步骤:

1. 选  $Q = I$ 。
2. 解

$$A^T P + PA = -I.$$

3. 因  $A$  Hurwitz, 得到  $P = P^T > 0$ 。
4. 计算

$$\dot{V} = x^T (A^T P + PA)x = -x^T x = -\|x\|^2.$$

5. 由 Theorem 4.2 得全局渐近稳定。

**代表题型 2: LaSalle 最大不变集**

若算得

$$\dot{V} = -x_2^2,$$

则

$$E = \{x : x_2 = 0\}.$$

不能立刻说原点渐近稳定。必须把系统方程限制在  $x_2 = 0$  上，再检查是否能永远保持  $x_2 = 0$ 。若要求  $\dot{x}_2 = 0$  后推出  $x_1 = 0$ ，最大不变集才是原点。

**代表题型 3: ISS 推导**

若得到

$$\dot{V} \leq -a\|x\|^2 + b\|x\|\|u\|,$$

用不等式

$$b\|x\|\|u\| \leq \frac{a}{2}\|x\|^2 + \frac{b^2}{2a}\|u\|^2.$$

于是

$$\dot{V} \leq -\frac{a}{2}\|x\|^2 + \frac{b^2}{2a}\|u\|^2.$$

这就是 ISS-Lyapunov 型不等式。

**本节易错点**

1. 习题中最常见错误是把  $\dot{V} \leq 0$  当成渐近稳定。
2. 线性化有虚轴特征值时，必须另找 Lyapunov 或高阶分析。
3. 最终有界和 ISS 都允许输入造成非零最终误差。

**推导补充**

第 4 章习题常围绕三种证明模板。模板一：二次 Lyapunov 函数。若系统接近线性或有自然能量，先试

$$V = x^T P x$$

或机械能/电磁能。计算

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x).$$

然后把它整理成平方项、交叉项和高阶项。交叉项一般用

$$2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2$$

吸收。模板二：LaSalle。若只得到

$$\dot{V} \leq 0$$

不要直接写渐近稳定。下一步必须求

$$E = \{x : \dot{V} = 0\}$$

然后检查在  $E$  中哪些轨线会一直留在  $E$ 。具体做法是把  $E$  的约束代入系统方程，看约束的导数是否仍为零。模板三：ISS。若系统有输入，尝试推出

$$\dot{V} \leq -\alpha(\|x\|) + \sigma(\|u\|)$$

或

$$\|x\| \geq \rho(\|u\|) \Rightarrow \dot{V} \leq -\alpha(\|x\|).$$

两种写法可以互相转换。第一种适合计算，第二种适理解。做题时最重要的检查是量词和区域：是局部还是全局？是稳定还是渐近稳定？是自治还是非自治？是状态稳定还是输入到状态稳定？很多错误不是代数错，而是把结论说大了。本节学习检查：你应该能在做题前先判断要用 Lyapunov 直接法、LaSalle、不稳定定理、线性化、比较函数、最终有界性还是 ISS。

## 2.11 证明细节与理解补充

本附录围绕第四章。核心思想是把状态轨线的稳定性转化为一个标量函数  $V$  的单调性或衰减性。要真正掌握 Lyapunov 方法，不能只背定理，还要会把每一个条件翻译成轨线估计。

### 2.11.1 稳定、吸引与渐近稳定的量词结构

**定义 2.2 (Lyapunov 稳定).** 自治系统  $\dot{x} = f(x)$  的平衡点  $x = 0$  称为稳定，如果对任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，使得

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

**定义 2.3 (吸引性).** 平衡点  $x = 0$  称为吸引的，如果存在  $r > 0$ ，使得

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

**定义 2.4 (渐近稳定).** 平衡点  $x = 0$  渐近稳定，当且仅当它既稳定又吸引。

稳定控制的是“永远不离开小邻域”，吸引控制的是“最终回到原点”。很多初学者会把二者混为一谈。单纯吸引但不稳定是可能的，单纯稳定但不吸引也很常见，例如无阻尼振子。

### 2.11.2 Lyapunov 基本定理的逐步证明

设存在连续可微函数  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ ，满足

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2$  为  $\mathcal{K}$  类函数。又设

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0.$$

证明稳定性如下。给定  $\varepsilon > 0$ ，选取  $\delta > 0$  使得

$$\alpha_2(\delta) < \alpha_1(\varepsilon).$$

若  $\|x(0)\| < \delta$ , 则

$$V(x(0)) \leq \alpha_2(\|x(0)\|) < \alpha_2(\delta) < \alpha_1(\varepsilon).$$

由  $\dot{V} \leq 0$ , 有

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) < \alpha_1(\varepsilon).$$

若某时刻  $\|x(t)\| \geq \varepsilon$ , 则

$$V(x(t)) \geq \alpha_1(\|x(t)\|) \geq \alpha_1(\varepsilon),$$

与上式矛盾。所以  $\|x(t)\| < \varepsilon$  对所有  $t \geq 0$  成立。若进一步

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha_3(\|x\|),$$

其中  $\alpha_3$  正定, 则  $V$  严格下降。由

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq - \int_0^t \alpha_3(\|x(s)\|) ds$$

得到

$$\int_0^\infty \alpha_3(\|x(s)\|) ds \leq V(x(0)) < \infty.$$

结合轨线有界和一致连续性, 可用 Barbalat 型论证或标准 Lyapunov 定理推出  $\alpha_3(\|x(t)\|) \rightarrow 0$ , 于是  $x(t) \rightarrow 0$ 。

### 2.11.3 指数稳定估计从哪里来

若存在常数  $c_1, c_2, c_3 > 0$ , 满足

$$c_1\|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2\|x\|^2, \quad \dot{V}(x) \leq -c_3\|x\|^2,$$

则由  $V \leq c_2\|x\|^2$  不能直接把  $\|x\|^2$  用  $V$  的上界替换到负号中; 需要用下界关系

$$V(x) \leq c_2\|x\|^2 \Rightarrow \|x\|^2 \geq \frac{1}{c_2}V(x).$$

因此

$$\dot{V} \leq -c_3\|x\|^2 \leq -\frac{c_3}{c_2}V.$$

解这个标量微分不等式:

$$V(t) \leq V(0)e^{-\frac{c_3}{c_2}t}.$$

再由  $c_1\|x(t)\|^2 \leq V(t)$  和  $V(0) \leq c_2\|x(0)\|^2$ , 得到

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{c_2}{c_1}e^{-\frac{c_3}{c_2}t}\|x(0)\|^2.$$

取平方根:

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}e^{-\frac{c_3}{2c_2}t}\|x(0)\|$$

这就是指数稳定的显式衰减界。

## 2.11.4 LaSalle 不变性原理的完整逻辑

若  $\dot{V} \leq 0$  只是半负定, 不能直接推出渐近稳定。LaSalle 原理的逻辑分三步。第一步, 由  $\dot{V} \leq 0$  得  $V(x(t))$  单调不增。如果初值在紧的正不变集  $\Omega$  内, 则轨线一直留在  $\Omega$  中。第二步, 因为  $\Omega$  紧, 轨线存在非空的  $\omega$  极限集。并且  $V(x(t))$  单调有下界, 所以  $V(x(t))$  收敛到某个常数  $c$ 。第三步, 若  $p$  属于  $\omega$  极限集, 则存在  $t_k \rightarrow \infty$  使  $x(t_k) \rightarrow p$ 。由连续性,  $V(p) = c$ 。极限集本身不变, 因此从  $p$  出发的轨线也留在极限集中, 沿这条轨线  $V$  恒等于  $c$ 。于是

$$\dot{V} = 0$$

在极限集上成立。故极限集包含在集合

$$E = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$$

中的最大不变子集内。

**注 2.1 (半负定的正确用法).** 若  $\dot{V} = -x_2^2$ , 只能说明  $x_2(t) \rightarrow 0$  的候选结论, 不能立刻说明  $x_1(t) \rightarrow 0$ 。必须把系统限制在  $x_2 = 0$  上检查不变性。若在  $x_2 = 0$  时还要求  $\dot{x}_2 = 0$ , 并由此推出  $x_1 = 0$ , 才能得到最大不变集为原点。

## 2.11.5 线性系统 Lyapunov 方程的证明要点

考虑线性系统  $\dot{x} = Ax$ 。若  $A$  Hurwitz, 则对任意  $Q = Q^T > 0$ , 方程

$$A^T P + PA = -Q$$

有唯一解

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt.$$

验证如下。因为  $A$  Hurwitz, 积分收敛。先证明  $P > 0$ : 对任意  $x \neq 0$ ,

$$x^T P x = \int_0^{\infty} x^T e^{A^T t} Q e^{At} x dt = \int_0^{\infty} (e^{At} x)^T Q (e^{At} x) dt.$$

由于  $Q > 0$ , 被积函数非负。若积分为零, 则  $e^{At} x = 0$  对几乎所有  $t$  成立, 特别由连续性推出  $x = e^{A0} x = 0$ , 矛盾。因此  $P > 0$ 。再验证 Lyapunov 方程。令

$$F(t) = e^{A^T t} Q e^{At}.$$

有

$$\frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{At}) = A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A.$$

于是

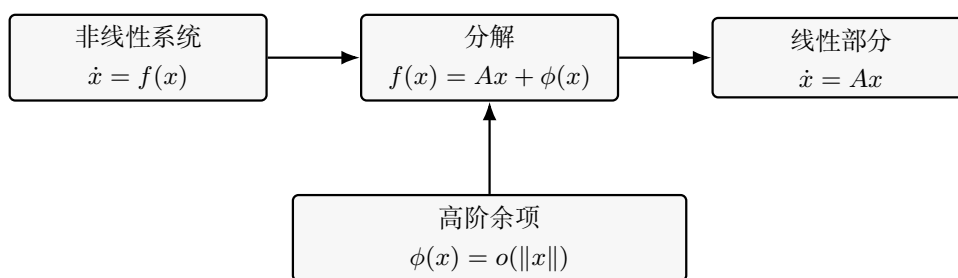
$$A^T P + PA = \int_0^{\infty} (A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A) dt.$$

右边等于

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{At}) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{A^T t} Q e^{At} - Q.$$

因  $A$  Hurwitz, 极限项为零, 故

$$A^T P + PA = -Q.$$



若  $A$  Hurwitz, 二次 Lyapunov 函数可压住高阶项。

图 2.3 线性化判据的证明结构：线性主导项压住高阶余项。

### 2.11.6 线性化判据的完整展开

设非线性系统

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0,$$

且  $f$  在原点可微。写成

$$f(x) = Ax + \phi(x), \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0),$$

其中

$$\frac{\|\phi(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0.$$

若  $A$  Hurwitz, 选  $Q = I$ , 解

$$A^T P + PA = -I,$$

得  $P > 0$ 。取  $V = x^T P x$ , 则

$$\dot{V} = x^T (A^T P + PA)x + 2x^T P \phi(x) = -\|x\|^2 + 2x^T P \phi(x).$$

估计扰动项：

$$|2x^T P \phi(x)| \leq 2\|P\|\|x\|\|\phi(x)\|.$$

由  $\phi(x) = o(\|x\|)$ , 对任意  $\eta > 0$ , 存在邻域使得

$$\|\phi(x)\| \leq \eta\|x\|.$$

因此

$$|2x^T P \phi(x)| \leq 2\|P\|\eta\|x\|^2.$$

取  $\eta < 1/(2\|P\|)$ , 得到

$$\dot{V} \leq -(1 - 2\|P\|\eta)\|x\|^2 < 0.$$

所以原点局部指数稳定。若  $A$  有某个特征值实部为正, 则可沿不稳定子空间构造 Chetaev 函数或使用不稳定流形思想证明原点不稳定。若  $A$  所有特征值实部非正且有虚轴特征值, 线性化判据失效, 必须进一步分析高阶项或使用中心流形。

## 2.11.7 一致稳定与非自治系统

对非自治系统

$$\dot{x} = f(t, x),$$

稳定性定义中的  $\delta$  是否依赖初始时间  $t_0$  至关重要。若  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ ，称为稳定；若可选  $\delta = \delta(\varepsilon)$  与  $t_0$  无关，称为一致稳定。非自治 Lyapunov 定理要求

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad \dot{V}(t, x) \leq 0$$

并且  $\alpha_1, \alpha_2$  不依赖  $t$ 。这是为了从  $V$  的界推出对所有初始时间统一有效的状态界。如果上下界本身依赖  $t$ ，则可能出现  $V$  看似下降但状态实际放大的现象。

## 2.11.8 ISS-Lyapunov 推导模板

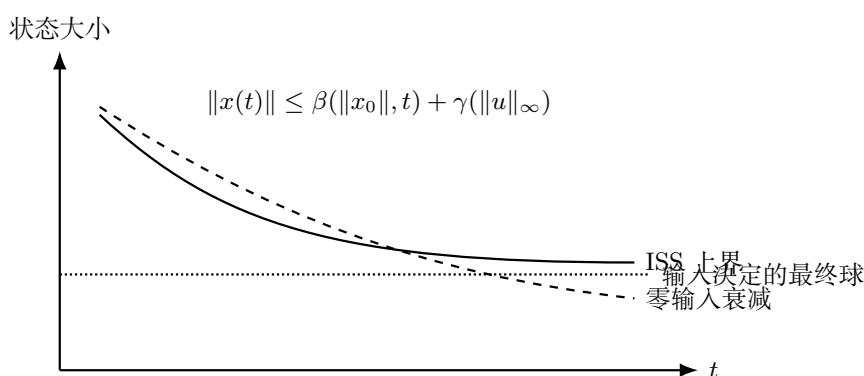


图 2.4 ISS 估计把零输入衰减与输入增益合并。

设存在  $V$  满足

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

且

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|) + \sigma(\|u\|).$$

这表示：状态本身提供衰减项，输入提供注入项。若输入小，衰减主导；若输入大，状态可被推离原点。常见的推导形式是

$$\dot{V} \leq -a\|x\|^2 + b\|x\|\|u\|.$$

用 Young 不等式

$$b\|x\|\|u\| \leq \frac{a}{2}\|x\|^2 + \frac{b^2}{2a}\|u\|^2.$$

得到

$$\dot{V} \leq -\frac{a}{2}\|x\|^2 + \frac{b^2}{2a}\|u\|^2.$$

这就是 ISS 形式。若  $u$  有界，则状态最终进入一个与  $\|u\|_\infty$  成比例的球；若  $u(t) \rightarrow 0$ ，在适当条件下状态也趋于零。

**注 2.2 (ISS 与鲁棒稳定).** ISS 是“有输入时的稳定性”最常用表达。它比简单有界性强，因为它同时包含零输入渐近稳定和输入对状态影响的增益界。对控制系统来说，ISS 说明扰动不会被系统无限放大。

## 2.11.9 例题四：用 Lyapunov 函数证明渐近稳定

考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2.$$

取

$$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

则

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_2(-x_1 - x_2).$$

展开并抵消交叉项：

$$\dot{V} = x_1x_2 - x_1x_2 - x_2^2 = -x_2^2 \leq 0.$$

由于  $\dot{V}$  只是半负定，不能直接推出渐近稳定。令

$$E = \{x : \dot{V} = 0\} = \{x : x_2 = 0\}.$$

在  $E$  上若轨线保持不变，必须有  $x_2 = 0$  且  $\dot{x}_2 = 0$ 。由系统方程

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 = -x_1.$$

要求  $\dot{x}_2 = 0$ ，得  $x_1 = 0$ 。所以  $E$  中最大不变集只有原点。由 LaSalle 原理，原点渐近稳定。

## 2.11.10 例题五：线性系统 Lyapunov 方程

考虑

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

证明其稳定并构造 Lyapunov 函数。取  $Q = I$ ，求  $P = P^T$  满足

$$A^T P + P A = -I.$$

设

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

先计算

$$A^T P = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2p_{12} & -2p_{22} \\ p_{11} - 3p_{12} & p_{12} - 3p_{22} \end{bmatrix}.$$

再计算

$$P A = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2p_{12} & p_{11} - 3p_{12} \\ -2p_{22} & p_{12} - 3p_{22} \end{bmatrix}.$$

相加得到

$$A^T P + P A = \begin{bmatrix} -4p_{12} & p_{11} - 3p_{12} - 2p_{22} \\ p_{11} - 3p_{12} - 2p_{22} & 2p_{12} - 6p_{22} \end{bmatrix}.$$

令其等于  $-I$ ，得到方程组

$$-4p_{12} = -1,$$

$$p_{11} - 3p_{12} - 2p_{22} = 0,$$

$$2p_{12} - 6p_{22} = -1.$$

由第一式

$$p_{12} = \frac{1}{4}.$$

第三式给出

$$\frac{1}{2} - 6p_{22} = -1 \Rightarrow p_{22} = \frac{1}{4}.$$

第二式给出

$$p_{11} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow p_{11} = \frac{5}{4}.$$

所以

$$P = \begin{bmatrix} 5/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

其主子式为  $5/4 > 0$ , 行列式

$$\det P = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{5}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{4} > 0.$$

故  $P > 0$ , 取  $V = x^T P x$  即得

$$\dot{V} = -x^T x.$$

### 2.11.11 例题六: ISS 型不等式

考虑估计

$$\dot{V} \leq -2\|x\|^2 + 3\|x\|\|u\|.$$

用 Young 不等式

$$3\|x\|\|u\| \leq \eta\|x\|^2 + \frac{9}{4\eta}\|u\|^2.$$

取  $\eta = 1$ , 得

$$\dot{V} \leq -\|x\|^2 + \frac{9}{4}\|u\|^2.$$

若  $V$  与  $\|x\|^2$  等价, 例如

$$c_1\|x\|^2 \leq V \leq c_2\|x\|^2,$$

则

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{c_2}V + \frac{9}{4}\|u\|^2.$$

解得

$$V(t) \leq e^{-t/c_2}V(0) + \frac{9}{4} \int_0^t e^{-(t-s)/c_2} \|u(s)\|^2 ds.$$

若  $u \in \mathcal{L}_\infty$ , 则

$$V(t) \leq e^{-t/c_2}V(0) + \frac{9}{4}c_2\|u\|_\infty^2.$$

这给出状态最终有界, 并且界由输入大小决定。

## 2.12 本章自检

### 2.12.1 第四章自检

1. 能准确区分稳定、吸引、渐近稳定、指数稳定和全局稳定。
2. 能解释正定、负定、半负定、径向无界在 Lyapunov 证明中的作用。
3. 能在  $\dot{V} \leq 0$  时正确使用 LaSalle，而不是直接推出渐近稳定。
4. 能对  $\dot{x} = Ax$  解 Lyapunov 方程并证明  $P > 0$ 。
5. 能把非线性系统分解为  $Ax + \phi(x)$  并完成线性化判据证明。
6. 能写出非自治系统一致稳定的量词结构。
7. 能把  $\dot{V} \leq -a\|x\|^2 + b\|x\|\|u\|$  转化为 ISS 型不等式。

# 输入-输出稳定性：范数、增益与反馈闭环

前三章主要从状态轨线出发看系统。本章换一个角度：把系统看成从输入信号到输出信号的算子，研究输入大小和输出大小之间的关系。这种观点特别适合反馈系统、级联系统和不方便完全建模的工程对象。本章的阅读主线是“信号空间—算子增益—状态模型—反馈闭环”。先定义  $\mathcal{L}_p$  空间、截断信号和因果算子；再说明有限增益如何表达输入输出稳定；随后把状态模型的 Lyapunov 不等式转化为输入输出估计；最后用小增益定理说明闭环稳定为什么可以由两个开环模块的增益乘积判断。这样，输入-输出稳定性就和第四章的 Lyapunov 方法形成互补：一个看内部状态，一个看外部端口。

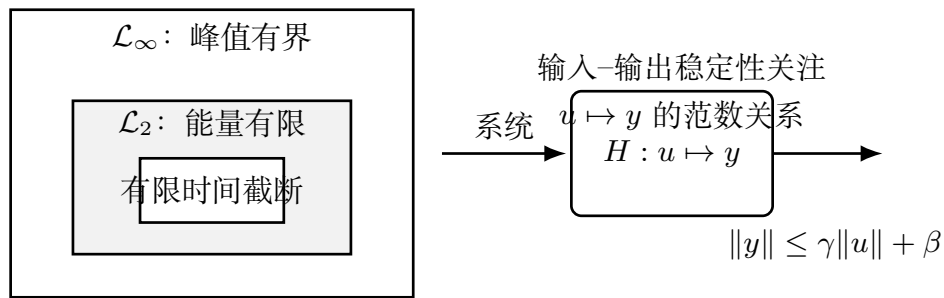


图 3.1 信号空间与系统算子的输入-输出估计。

第 5 章把视角从“状态是否靠近平衡点”转到“输入信号经过系统后，输出信号是否仍然良好”。这在控制工程中非常自然：参考输入、扰动、噪声、未建模动态都以信号形式进入系统；我们关心的是输出幅值、输出能量或内部误差信号是否被系统放大到不可接受。第 4 章的 Lyapunov 稳定性主要问：

$$x(0) \text{ 小} \Rightarrow x(t) \text{ 小或收敛.}$$

第 5 章的输入输出稳定性主要问：

$$u \in \mathcal{L} \Rightarrow y = Hu \in \mathcal{L},$$

以及更定量地问：

$$\|y\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{L}} + \beta.$$

这里  $H$  是系统算子， $u$  是输入信号， $y$  是输出信号， $\gamma$  是系统对信号大小的增益上界， $\beta$  是偏置项。若  $\beta = 0$ ，零输入对应零输出；若  $\beta > 0$ ，即使零输入也可能有非零输出，例如非零初始状态造成的自然响应。

本章逻辑按原文小节是：

1. 5.1 定义信号空间和  $\mathcal{L}$  稳定。
2. 5.2 用 Lyapunov 工具证明状态模型的输入输出稳定。

3. 5.3 专门研究  $\mathcal{L}_2$  增益，也就是能量放大。
4. 5.4 用小增益定理分析反馈互联。
5. 5.5 用习题训练串联、并联、反馈和非线性增益判断。

**定义 3.1 (信号空间与有限增益稳定).** 对信号  $u$ ,  $\|u\|_{\mathcal{L}_p}$  表示其  $p$  范数。若系统算子  $H$  满足  $\|Hu\|_{\mathcal{L}_p} \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{L}_p} + \beta$ , 则称其为有限增益  $\mathcal{L}_p$  稳定, 其中  $\gamma$  是增益上界,  $\beta$  是偏置项。

**命题 3.1 (线性系统的  $\mathcal{L}_2$  增益).** 稳定 LTI 系统的精确  $\mathcal{L}_2$  增益等于其传递矩阵在频域上的最大奇异值上确界, 即  $\|G\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(G(j\omega))$ 。

**定理 3.1 (小增益定理).** 若两个因果算子  $H_1, H_2$  有有限增益  $\gamma_1, \gamma_2$ , 并且互联适应且  $\gamma_1\gamma_2 < 1$ , 则其反馈互联系统内部稳定。

**注 3.1 (输入-输出观点).** 输入-输出稳定不直接要求构造状态能量函数, 而是要求外部信号经过系统后不会被无限放大。它特别适合处理反馈互联、鲁棒扰动和黑箱模型。

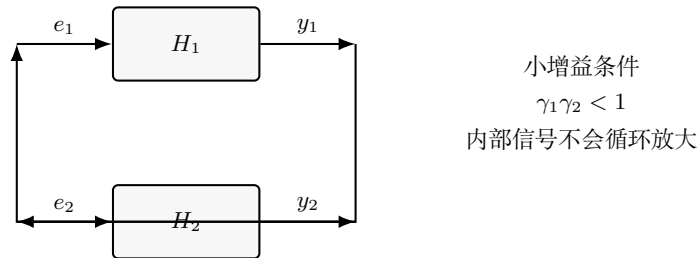


图 3.2 小增益定理中的反馈互联与环路增益条件。

### 3.1 信号空间与 $\mathcal{L}$ 稳定性

#### 本节核心目标

本节建立输入输出稳定性的语言。它不是先写微分方程, 而是把系统看作一个算子

$$y = Hu.$$

其中:

- $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  是输入信号;  $m$  是输入通道数。
- $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^q$  是输出信号;  $q$  是输出通道数。
- $H$  是从输入信号到输出信号的映射。

本节核心问题是: 如果输入  $u$  属于某个“好信号空间” $\mathcal{L}$ , 输出  $y$  是否也属于相同类型的好信号空间。

#### 信号范数的三个基本性质

一个信号范数  $\|u\|$  至少要满足:

1. 非负性:

$$\|u\| \geq 0, \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u(t) \equiv 0.$$

2. 齐次性：对任意常数  $a$ ,

$$\|au\| = |a|\|u\|.$$

3. 三角不等式：

$$\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|.$$

三角不等式在后面小增益定理中会反复使用，例如从  $e_1 = u_1 - y_2$  得到

$$\|e_{1T}\| \leq \|u_{1T}\| + \|y_{2T}\|.$$

### $\mathcal{L}_\infty$ ：有界信号空间

$\mathcal{L}_\infty^m$  是所有分段连续、有界的  $m$  维信号组成的空间。范数定义为

$$\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|.$$

这里右边的  $\|u(t)\|$  是  $\mathbb{R}^m$  中的向量范数；外面的  $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty}$  是整个时间信号的范数。若

$$\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} < \infty,$$

则输入幅值永远有界。对控制工程，这对应 bounded input。

### $\mathcal{L}_2$ ：有限能量信号空间

$\mathcal{L}_2^m$  常用 2-范数定义：

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} = \left( \int_0^\infty u^T(t)u(t) dt \right)^{1/2}.$$

因为

$$u^T(t)u(t) = \sum_{i=1}^m u_i^2(t) = \|u(t)\|_2^2,$$

所以

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \int_0^\infty \|u(t)\|_2^2 dt.$$

这像能量。如果  $u(t)$  是电压或力一类信号， $\mathcal{L}_2$  范数刻画有限能量或有限均方总量。

### 一般 $\mathcal{L}_p$ 空间

对  $1 \leq p < \infty$ ：

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p} = \left( \int_0^\infty \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p}.$$

注意两个  $p$  的区别：

- $\mathcal{L}_p$  的下标  $p$  描述时间积分中的幂次。

- $\|u(t)\|$  可以使用某个有限维向量范数，常见是欧氏范数。

在有限维空间中，不同向量范数等价，所以很多稳定结论不依赖具体选哪一种向量范数；但计算增益数值时会依赖。

### 为什么需要扩展空间 $\mathcal{L}_e$

如果只把  $H$  定义成

$$H: \mathcal{L}^m \rightarrow \mathcal{L}^q,$$

就无法讨论“不稳定系统”。因为不稳定系统可能对某个好输入产生坏输出，输出不属于  $\mathcal{L}^q$ 。为了仍能把系统算子定义出来，主教材引入扩展空间。

给定信号  $u(t)$ ，定义截断信号

$$u_T(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

若对每个有限  $T$ ，都有

$$u_T \in \mathcal{L},$$

则称

$$u \in \mathcal{L}_e.$$

例如  $u(t) = t$  不属于  $\mathcal{L}_\infty$ ，因为

$$\sup_{t \geq 0} |t| = \infty.$$

但对任意有限  $T$ ，

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |t| = T < \infty,$$

所以  $u_T \in \mathcal{L}_\infty$ ，于是  $u \in \mathcal{L}_{\infty e}$ 。扩展空间允许我们先在有限时间窗口上定义信号和系统，再用估计判断是否全局属于  $\mathcal{L}$ 。

### 因果性

算子  $H$  是因果的，意思是：输出到时间  $T$  为止只依赖输入到时间  $T$  为止。形式上，若

$$u_1(t) = u_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

则

$$(Hu_1)(t) = (Hu_2)(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

也可以用截断表示：

$$(Hu)_T = (Hu_T)_T.$$

状态空间系统天然因果，因为微分方程从 0 积分到  $t$  只用到  $[0, t]$  上的输入。

**Definition 5.1:  $\mathcal{L}$  stable**

映射

$$H: \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q$$

称为  $\mathcal{L}$  stable, 若存在  $\alpha \in \mathcal{K}$  和  $\beta \geq 0$ , 使对所有输入  $u$  和所有有限  $T$ ,

$$\|(Hu)_T\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha(\|u_T\|_{\mathcal{L}}) + \beta. \quad (5.1-a)$$

有限增益  $\mathcal{L}$  stable, 若存在  $\gamma \geq 0, \beta \geq 0$ , 使

$$\|(Hu)_T\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma\|u_T\|_{\mathcal{L}} + \beta. \quad (5.1-b)$$

这里:

- $\gamma$  是增益上界。
- $\beta$  是 bias term, 允许零输入也有非零输出, 比如由初始状态引起的自然响应。
- 若  $\beta = 0$ , 系统在零输入时输出也被估计为零。

**从截断估计推出普通  $\mathcal{L}$  映射**

若系统因果且满足 (5.1-b), 并且  $u \in \mathcal{L}^m$ , 则  $u_T \rightarrow u$  的范数不超过  $\|u\|$ , 所以

$$\|(Hu)_T\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma\|u\|_{\mathcal{L}} + \beta$$

对所有  $T$  成立。令  $T \rightarrow \infty$ , 可得输出整体范数有限:

$$\|Hu\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma\|u\|_{\mathcal{L}} + \beta.$$

所以对于因果系统, 截断定义确实表达了“好输入产生好输出”。

**Example 5.1: 记忆无关非线性**

记忆无关函数是

$$y(t) = h(u(t)).$$

它没有动态状态, 当前输出只由当前输入决定。令

$$h(u) = a + b \tanh(cu), \quad a, b, c \geq 0.$$

先求导:

$$\frac{d}{du} \tanh(cu) = c \operatorname{sech}^2(cu).$$

所以

$$h'(u) = bc \operatorname{sech}^2(cu).$$

由于

$$0 \leq \operatorname{sech}^2(cu) \leq 1,$$

得到

$$|h'(u)| \leq bc.$$

用均值定理: 对任意  $u$ , 存在  $\xi$  介于 0 与  $u$  之间, 使

$$h(u) - h(0) = h'(\xi)(u - 0).$$

取绝对值:

$$|h(u) - h(0)| \leq bc|u|.$$

又

$$h(0) = a + b \tanh 0 = a.$$

所以

$$|h(u)| \leq |h(0)| + bc|u| = a + bc|u|. \quad (5.1-c)$$

对  $\mathcal{L}_\infty$ , 有

$$\|y\|_\infty = \sup_t |h(u(t))| \leq \sup_t (a + bc|u(t)|).$$

因为  $a$  是常数:

$$\sup_t (a + bc|u(t)|) = a + bc \sup_t |u(t)|.$$

因此

$$\|y\|_\infty \leq a + bc\|u\|_\infty.$$

这说明系统 finite-gain  $\mathcal{L}_\infty$  stable, 增益  $\gamma = bc$ , 偏置  $\beta = a$ .

若  $a = 0$ , 则

$$|h(u)| \leq bc|u|.$$

对  $1 \leq p < \infty$ :

$$\|y\|_p^p = \int_0^\infty |h(u(t))|^p dt \leq \int_0^\infty (bc)^p |u(t)|^p dt.$$

把常数提出:

$$\|y\|_p^p \leq (bc)^p \|u\|_p^p.$$

两边取  $p$  次方根:

$$\|y\|_p \leq bc\|u\|_p.$$

所以对每个  $p \in [1, \infty]$  都是 finite-gain  $\mathcal{L}_p$  stable。

为什么  $h(u) = u^2$  是  $\mathcal{L}_\infty$  stable 但不是 finite-gain

若

$$y = u^2,$$

则

$$\|y\|_\infty = \sup_t |u(t)|^2 = (\sup_t |u(t)|)^2 = \|u\|_\infty^2.$$

所以它是  $\mathcal{L}_\infty$  stable, 可取

$$\alpha(r) = r^2, \quad \beta = 0.$$

但 finite-gain stable 要求存在  $\gamma$ ,  $\beta \geq 0$ , 使

$$r^2 \leq \gamma r + \beta, \quad \forall r \geq 0.$$

令  $r \rightarrow \infty$ , 左边二次增长, 右边线性增长, 二者不可能全局成立。因此不是 finite-gain  $\mathcal{L}_\infty$  stable。

**Example 5.2: 卷积系统的  $\mathcal{L}_p$  稳定**

考虑因果卷积系统

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau,$$

其中  $h(t) = 0$  对  $t < 0$ 。若

$$\|h\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^\infty |h(s)|ds < \infty,$$

则系统对所有  $p \in [1, \infty]$  finite-gain  $\mathcal{L}_p$  stable, 增益不超过  $\|h\|_1$ 。

$p = \infty$  的逐步证明

先取绝对值:

$$|y(t)| \leq \int_0^t |h(t-\tau)||u(\tau)|d\tau.$$

因为

$$|u(\tau)| \leq \|u\|_\infty,$$

所以

$$|y(t)| \leq \|u\|_\infty \int_0^t |h(t-\tau)|d\tau.$$

令

$$s = t - \tau.$$

当  $\tau = 0$  时  $s = t$ , 当  $\tau = t$  时  $s = 0$ 。因此

$$\int_0^t |h(t-\tau)|d\tau = \int_0^t |h(s)|ds \leq \int_0^\infty |h(s)|ds = \|h\|_1.$$

所以

$$|y(t)| \leq \|h\|_1 \|u\|_\infty.$$

对  $t$  取上确界:

$$\|y\|_\infty \leq \|h\|_1 \|u\|_\infty.$$

$p = 1$  的逐步证明

从

$$|y(t)| \leq \int_0^t |h(t-\tau)| |u(\tau)| d\tau$$

开始, 对  $t \in [0, T]$  积分:

$$\int_0^T |y(t)| dt \leq \int_0^T \int_0^t |h(t-\tau)| |u(\tau)| d\tau dt.$$

积分区域是

$$0 \leq \tau \leq t \leq T.$$

交换积分次序后,  $\tau$  从 0 到  $T$ , 而  $t$  从  $\tau$  到  $T$ :

$$\int_0^T |y(t)| dt \leq \int_0^T |u(\tau)| \int_\tau^T |h(t-\tau)| dt d\tau.$$

令  $s = t - \tau$ , 内层积分变为

$$\int_0^{T-\tau} |h(s)| ds \leq \|h\|_1.$$

所以

$$\int_0^T |y(t)| dt \leq \|h\|_1 \int_0^T |u(\tau)| d\tau.$$

即

$$\|y_T\|_1 \leq \|h\|_1 \|u_T\|_1.$$

$1 < p < \infty$  的证明骨架

令  $q$  是  $p$  的共轭指数:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

把 integrand 拆成

$$|h(t-\tau)| |u(\tau)| = |h(t-\tau)|^{1/q} \left( |h(t-\tau)|^{1/p} |u(\tau)| \right).$$

用 Hölder 不等式:

$$|y(t)| \leq \left( \int_0^t |h(t-\tau)| d\tau \right)^{1/q} \left( \int_0^t |h(t-\tau)| |u(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p}.$$

第一项不超过  $\|h\|_1^{1/q}$ 。两边取  $p$  次方并对  $t$  积分, 再交换积分次序, 可得到

$$\|y_T\|_p^p \leq \|h\|_1^p \|u_T\|_p^p.$$

取  $p$  次方根:

$$\|y_T\|_p \leq \|h\|_1 \|u_T\|_p.$$

**为什么只要求每个有限  $T$  不够**

若  $h(t) = e^t$ , 则每个有限截断

$$\int_0^T e^t dt = e^T - 1$$

有限, 但它随  $T$  无界。因此不能找到一个与  $T$  无关的统一增益  $\gamma$ 。Definition 5.1 要求增益常数不依赖  $T$ , 所以必须有  $h \in \mathcal{L}_1$ 。

**Example 5.3:  $y = \tan u$  与 small-signal 稳定**

函数

$$y = \tan u$$

只在

$$|u| < \frac{\pi}{2}$$

内定义。若输入可能达到  $\pi/2$ , 输出会发散。因此不能说它对所有  $\mathcal{L}$  输入稳定。若限制

$$|u(t)| \leq r < \frac{\pi}{2},$$

则在  $[-r, r]$  上

$$\left| \frac{d}{du} \tan u \right| = \sec^2 u \leq \sec^2 r.$$

由均值定理:

$$|\tan u - \tan 0| \leq \sec^2 r |u|.$$

所以

$$|y| \leq \sec^2 r |u|.$$

也可用更保守的割线界

$$|y| \leq \frac{\tan r}{r} |u|.$$

这说明在小幅值输入集合上系统 finite-gain stable。这就是 small-signal  $\mathcal{L}$  stability。

特别注意：对  $p < \infty$ ，限制瞬时幅值  $|u(t)| \leq r$  不等于限制  $\|u\|_p$  小。一个持续很久的小幅值信号可以有很大的  $\mathcal{L}_p$  范数。因此 small-signal 定义使用的是瞬时幅值约束，而不是简单的  $\|u\|_p < r$ 。

### 本节易错点

1.  $\mathcal{L}$  stable 允许非线性 class  $\mathcal{K}$  上界；finite-gain stable 要求线性上界。
2.  $\mathcal{L}_\infty$  关注峰值幅度， $\mathcal{L}_2$  关注能量。
3. 扩展空间  $\mathcal{L}_e$  是为了处理可能不稳定的系统和截断估计。
4. small-signal 稳定限制的是输入瞬时幅值，而不总是限制  $\mathcal{L}_p$  范数。

### 推导补充

输入输出稳定性把关注点从状态  $x(t)$  转到信号映射：输入  $u$  经过系统变成输出  $y = Hu$ 。我们关心的是

$$\|y\| \leq \gamma \|u\| + \beta.$$

这里  $\gamma$  是增益， $\beta$  是偏置。若  $\beta = 0$ ，称为零偏置有限增益；若  $\beta > 0$ ，表示系统即使输入小，也可能有由初始条件或非线性造成的固定输出量。

$\mathcal{L}_p$  范数定义为

$$\|u\|_p = \left( \int_0^\infty \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

对  $p = \infty$ ，定义为本质上确界：

$$\|u\|_\infty = \text{ess sup}_{t \geq 0} \|u(t)\|.$$

$\mathcal{L}_2$  是能量有限， $\mathcal{L}_\infty$  是幅值有界。一个信号可以有界但能量无限，例如常数信号  $u(t) = 1$ ：

$$\|u\|_\infty = 1,$$

但

$$\|u\|_2^2 = \int_0^\infty 1 dt = \infty.$$

这说明不同范数表达的是不同物理性质。扩展空间  $\mathcal{L}_{pe}$  的意思是：信号本身未必在无限时间上属于  $\mathcal{L}_p$ ，但任意有限截断属于  $\mathcal{L}_p$ 。定义截断

$$u_T(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

若每个  $T < \infty$  都有  $u_T \in \mathcal{L}_p$ ，则  $u \in \mathcal{L}_{pe}$ 。

为什么定义稳定时要用截断？因为因果系统在  $[0, T]$  的输出只应依赖  $[0, T]$  的输入。有限增益定义常要求

$$\|(Hu)_T\|_p \leq \gamma \|u_T\|_p + \beta, \quad \forall T \geq 0.$$

如果这个不等式对所有  $T$  成立，而且  $u \in \mathcal{L}_p$ ，让  $T \rightarrow \infty$  可得

$$\|Hu\|_p \leq \gamma \|u\|_p + \beta.$$

记忆无关非线性  $y = h(u)$  的判断也可逐步做。若存在

$$\|h(u)\| \leq a\|u\| + b,$$

则对  $p = \infty$ :

$$\|y\|_\infty = \text{ess sup}_t \|h(u(t))\| \leq \text{ess sup}_t (a\|u(t)\| + b) = a\|u\|_\infty + b.$$

对  $p < \infty$ , 若  $b > 0$ , 常数项在无限时间上通常不可积, 所以不能直接得到  $\mathcal{L}_p$  有限增益。若  $b = 0$ , 则

$$\|y\|_p^p = \int_0^\infty \|h(u(t))\|^p dt \leq \int_0^\infty a^p \|u(t)\|^p dt = a^p \|u\|_p^p.$$

取  $p$  次根:

$$\|y\|_p \leq a\|u\|_p.$$

卷积系统

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

若  $g \in \mathcal{L}_1$ , 则由 Young 卷积不等式

$$\|y\|_p \leq \|g\|_1 \|u\|_p.$$

这说明稳定线性系统的脉冲响应绝对可积时, 对所有  $1 \leq p \leq \infty$  都是有限增益稳定。本节学习检查: 你应该能区分  $\mathcal{L}_p$ 、 $\mathcal{L}_{pe}$ 、finite-gain、bias、causality, 并能判断记忆无关非线性是否给出全局或小信号  $\mathcal{L}$  稳定。

## 3.2 状态模型的输入-输出稳定性

### 本节核心目标

本节把第 4 章的 Lyapunov 工具连接到第 5 章的输入输出稳定性。系统为

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (5.2-a)$$

$$y = h(t, x, u). \quad (5.2-b)$$

其中:

- $x \in \mathbb{R}^n$ : 状态。
- $u \in \mathbb{R}^m$ : 输入。
- $y \in \mathbb{R}^q$ : 输出。
- $f$  是状态方程右端。
- $h$  是输出函数。

固定初始状态  $x_0$  后, 这个状态模型定义一个算子

$$H : u \mapsto y.$$

本节的主线是: 若无输入系统

$$\dot{x} = f(t, x, 0) \quad (5.2-c)$$

的原点稳定得足够强, 那么有输入系统的输出对输入具有  $\mathcal{L}$  稳定性。

**Theorem 5.1: 指数稳定推出小信号 finite-gain  $\mathcal{L}_p$  稳定**

假设无输入系统原点指数稳定, 并存在 Lyapunov 函数  $V(t, x)$  满足

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2, \quad (5.2-d)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) \leq -c_3 \|x\|^2, \quad (5.2-e)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|. \quad (5.2-f)$$

同时输入进入状态方程的影响满足

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\| \leq L \|u\|, \quad (5.2-g)$$

输出满足线性增长界

$$\|h(t, x, u)\| \leq \eta_1 \|x\| + \eta_2 \|u\|. \quad (5.2-h)$$

那么当初值和输入瞬时幅值足够小时, 系统 small-signal finite-gain  $\mathcal{L}_p$  stable; 若所有条件全局成立且无输入系统全局指数稳定, 则得到全局 finite-gain  $\mathcal{L}_p$  stable。

**第一步: 沿有输入系统计算  $\dot{V}$**

沿有输入系统:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u).$$

加减  $f(t, x, 0)$ :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) + \frac{\partial V}{\partial x} [f(t, x, u) - f(t, x, 0)].$$

用 (5.2-e):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) \leq -c_3 \|x\|^2.$$

对输入扰动项, 用 Cauchy-Schwarz:

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x} [f(t, x, u) - f(t, x, 0)] \right| \leq \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\|.$$

代入 (5.2-f) 和 (5.2-g):

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x} [f(t, x, u) - f(t, x, 0)] \right| \leq c_4 \|x\| L \|u\|.$$

所以

$$\dot{V} \leq -c_3 \|x\|^2 + c_4 L \|x\| \|u\|. \quad (5.2-i)$$

这个式子非常重要: 无输入时有严格衰减  $-c_3 \|x\|^2$ , 输入会注入一项  $c_4 L \|x\| \|u\|$ 。

**第二步: 令  $W = \sqrt{V}$ , 把二次衰减变成一阶滤波**  
定义

$$W(t) = \sqrt{V(t, x(t))}.$$

若  $W > 0$ , 则

$$\dot{W} = \frac{1}{2\sqrt{V}} \dot{V} = \frac{\dot{V}}{2W}.$$

由 (5.2-d):

$$W^2 = V \leq c_2 \|x\|^2 \Rightarrow W \leq \sqrt{c_2} \|x\|,$$

因此

$$\|x\| \geq \frac{W}{\sqrt{c_2}}. \quad (5.2-j)$$

同样,

$$W^2 = V \geq c_1 \|x\|^2 \Rightarrow W \geq \sqrt{c_1} \|x\|,$$

因此

$$\frac{\|x\|}{W} \leq \frac{1}{\sqrt{c_1}}. \quad (5.2-k)$$

把 (5.2-i) 除以  $2W$ :

$$\dot{W} \leq -\frac{c_3 \|x\|^2}{2W} + \frac{c_4 L \|x\| \|u\|}{2W}.$$

处理第一项。因为  $W \leq \sqrt{c_2} \|x\|$ , 所以

$$\frac{\|x\|^2}{W} \geq \frac{\|x\|^2}{\sqrt{c_2} \|x\|} = \frac{\|x\|}{\sqrt{c_2}}.$$

再由 (5.2-j):

$$\frac{\|x\|}{\sqrt{c_2}} \geq \frac{W}{c_2}.$$

所以

$$-\frac{c_3\|x\|^2}{2W} \leq -\frac{c_3}{2c_2}W.$$

处理第二项，用 (5.2-k)：

$$\frac{c_4L\|x\|\|u\|}{2W} \leq \frac{c_4L}{2\sqrt{c_1}}\|u\|.$$

因此

$$\dot{W} \leq -aW + b\|u\|, \quad (5.2-1)$$

其中

$$a = \frac{c_3}{2c_2}, \quad b = \frac{c_4L}{2\sqrt{c_1}}.$$

当  $W = 0$  时，普通导数可能不好处理，主教材用上右导数  $D^+W$  得到同样不等式。因此 (5.2-1) 可在所有时刻按比较引理使用。

### 第三步：解比较方程

比较方程为

$$\dot{z} = -az + b\|u(t)\|, \quad z(0) = W(0).$$

使用积分因子  $e^{at}$ ：

$$e^{at}\dot{z} + ae^{at}z = be^{at}\|u(t)\|.$$

左边是

$$\frac{d}{dt}(e^{at}z(t)).$$

所以

$$\frac{d}{dt}(e^{at}z(t)) = be^{at}\|u(t)\|.$$

从 0 到  $t$  积分：

$$e^{at}z(t) - z(0) = b \int_0^t e^{a\tau}\|u(\tau)\|d\tau.$$

两边乘  $e^{-at}$ ：

$$z(t) = z(0)e^{-at} + b \int_0^t e^{-a(t-\tau)}\|u(\tau)\|d\tau.$$

由比较引理：

$$W(t) \leq W(0)e^{-at} + b \int_0^t e^{-a(t-\tau)}\|u(\tau)\|d\tau. \quad (5.2-m)$$

这个式子说明  $W$  被一个稳定一阶系统驱动。

**第四步: 从  $W$  得到状态界**

由  $V \geq c_1 \|x\|^2$ :

$$\sqrt{c_1} \|x(t)\| \leq W(t).$$

所以

$$\|x(t)\| \leq \frac{W(0)}{\sqrt{c_1}} e^{-at} + \frac{b}{\sqrt{c_1}} \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \|u(\tau)\| d\tau. \quad (5.2-n)$$

又由  $V(0, x_0) \leq c_2 \|x_0\|^2$ :

$$W(0) \leq \sqrt{c_2} \|x_0\|.$$

代入:

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|x_0\| e^{-at} + \frac{b}{\sqrt{c_1}} (e^{-a \cdot} * \|u\|)(t).$$

这一步把状态响应分成两部分:

1. 初值造成的指数衰减项。
2. 输入经过稳定卷积核后的响应项。

**第五步: 从状态界到输出界**

由输出增长条件:

$$\|y(t)\| \leq \eta_1 \|x(t)\| + \eta_2 \|u(t)\|.$$

取  $\mathcal{L}_p$  范数并用三角不等式:

$$\|y_T\|_p \leq \eta_1 \|x_T\|_p + \eta_2 \|u_T\|_p.$$

状态界中的卷积项满足 Young 不等式:

$$\|e^{-a \cdot} * \|u\|\|_p \leq \|e^{-a \cdot}\|_1 \|u\|_p.$$

而

$$\|e^{-a \cdot}\|_1 = \int_0^\infty e^{-at} dt = \frac{1}{a}.$$

所以输入到状态的  $\mathcal{L}_p$  增益不超过

$$\frac{b}{a\sqrt{c_1}}.$$

因此输出的输入增益不超过

$$\gamma = \eta_2 + \eta_1 \frac{b}{a\sqrt{c_1}}.$$

代入  $a, b$ :

$$\frac{b}{a\sqrt{c_1}} = \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \cdot \frac{2c_2}{c_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1}} = \frac{c_2 c_4 L}{c_1 c_3}.$$

所以

$$\gamma = \eta_2 + \eta_1 \frac{c_2 c_4 L}{c_1 c_3}.$$

偏置  $\beta$  来自初始状态项。对  $p = \infty$ :

$$\|e^{-at}\|_\infty = 1,$$

所以初值贡献可取

$$\beta = \eta_1 \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|x_0\|.$$

对  $1 \leq p < \infty$ :

$$\|e^{-at}\|_p = \left( \int_0^\infty e^{-apt} dt \right)^{1/p} = \left( \frac{1}{ap} \right)^{1/p}.$$

因此初值偏置按这个因子缩放。

### 为什么定理是 small-signal

上面的推导只在  $x$  留在 Lyapunov 条件有效的区域时成立。为了保证这一点, 主教材限制:

- 初值  $x_0$  足够小;
- 输入瞬时幅值  $\sup \|u(t)\|$  足够小。

这样由状态界可以先证明  $x(t)$  不会跑出半径  $r$  的区域, 再合法使用所有不等式。若所有假设全局成立, 则不需要 small-signal 限制。

### Corollary 5.1

若  $f$  在  $(x, u) = (0, 0)$  附近连续可微, 且  $\partial f/\partial x$ 、 $\partial f/\partial u$  有界, 无输入系统原点指数稳定, 则由逆 Lyapunov 定理可得到满足 (5.2-d)-(5.2-f) 的  $V$ 。因此局部 small-signal finite-gain  $\mathcal{L}_p$  stable。

### Corollary 5.2: LTI 状态模型

对线性时不变系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du,$$

若  $A$  Hurwitz, 则系统对所有  $p \in [1, \infty]$  finite-gain  $\mathcal{L}_p$  stable。  
原因逐步看:

1.  $A$  Hurwitz  $\Rightarrow$  存在  $P = P^T > 0$ , 使

$$PA + A^T P = -I.$$

2. 取  $V = x^T P x$ , 则无输入时

$$\dot{V} = x^T(PA + A^T P)x = -\|x\|^2.$$

3. 输入项满足

$$\|Ax + Bu - Ax\| = \|Bu\| \leq \|B\|\|u\|.$$

4. 输出满足

$$\|Cx + Du\| \leq \|C\|\|x\| + \|D\|\|u\|.$$

所以 Theorem 5.1 的条件全局成立。

**Theorem 5.2: 一致渐近稳定推出 small-signal  $\mathcal{L}_\infty$  stable**

如果无输入系统只是 uniformly asymptotically stable, 不一定指数稳定, 则未必能得到所有  $\mathcal{L}_p$  的卷积型 finite-gain 结论, 但可以得到  $\mathcal{L}_\infty$  小信号稳定。核心导数估计是

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|) + \alpha_4(\|x\|)\alpha_5(\|u\|).$$

若  $\|x\| \leq r$ , 则

$$\alpha_4(\|x\|) \leq \alpha_4(r).$$

于是

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|) + \alpha_4(r)\alpha_5(\|u\|_\infty).$$

取  $0 < \theta < 1$ , 把负项拆成

$$-\alpha_3 = -(1 - \theta)\alpha_3 - \theta\alpha_3.$$

若

$$\theta\alpha_3(\|x\|) \geq \alpha_4(r)\alpha_5(\|u\|_\infty),$$

即

$$\|x\| \geq \alpha_3^{-1}\left(\frac{\alpha_4(r)}{\theta}\alpha_5(\|u\|_\infty)\right),$$

则

$$\dot{V} \leq -(1 - \theta)\alpha_3(\|x\|).$$

这正是第 4.8 节最终有界定理的结构, 因此有界输入产生有界状态, 再由输出增长界得到有界输出。

**Theorem 5.3: ISS 推出  $\mathcal{L}_\infty$  stable**

若状态满足 ISS:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\|u\|_\infty),$$

且输出满足

$$\|h(t, x, u)\| \leq \alpha_1(\|x\|) + \alpha_2(\|u\|) + \eta,$$

则

$$\|y(t)\| \leq \alpha_1(\beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\|u\|_\infty)) + \alpha_2(\|u\|_\infty) + \eta.$$

由于  $\beta(\|x_0\|, t) \leq \beta(\|x_0\|, 0)$ , 右边对所有  $t$  有统一上界。因此

$$\|y\|_\infty < \infty.$$

所以系统  $\mathcal{L}_\infty$  stable。

**本节易错点**

1. 状态稳定不自动等于输入输出稳定; 输出函数必须有增长界。
2. Theorem 5.1 的核心是把  $\sqrt{V}$  变成一阶稳定滤波器。
3. small-signal 限制是为了保证轨线留在假设有效的局部区域。
4. ISS 是  $\mathcal{L}_\infty$  稳定的自然状态空间条件。

**推导补充**

状态模型的输入输出稳定性要把第 4 章的状态 Lyapunov 分析和第 5 章的信号范数连接起来。考虑

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad y = h(t, x, u).$$

如果无输入系统  $\dot{x} = f(t, x, 0)$  指数稳定, 直觉上小输入应产生小状态, 小状态应产生小输出。Theorem 5.1 就是在合适局部条件下把这个直觉写成  $\mathcal{L}_p$  增益估计。典型推导从 Lyapunov 函数开始。假设

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2\|x\|^2,$$

且无输入时

$$\dot{V} \leq -c_3\|x\|^2.$$

有输入时, 右端多出  $u$  项。局部 Lipschitz 给出类似

$$\dot{V} \leq -c_3\|x\|^2 + c_4\|x\|\|u\|.$$

这里的交叉项来自输入扰动对状态能量变化的影响。现在令

$$w = \sqrt{V}.$$

因为

$$\dot{W} = \frac{1}{2\sqrt{V}} \dot{V}$$

在  $V > 0$  时成立, 所以把上式除以  $2W$ 。先把  $\|x\|$  与  $W$  互换。由

$$V \leq c_2 \|x\|^2$$

得到

$$\|x\| \geq \frac{W}{\sqrt{c_2}}.$$

由

$$V \geq c_1 \|x\|^2$$

得到

$$\|x\| \leq \frac{W}{\sqrt{c_1}}.$$

于是负项

$$-c_3 \|x\|^2 \leq -\frac{c_3}{c_2} W^2.$$

交叉项

$$c_4 \|x\| \|u\| \leq \frac{c_4}{\sqrt{c_1}} W \|u\|.$$

所以

$$\dot{V} \leq -\frac{c_3}{c_2} W^2 + \frac{c_4}{\sqrt{c_1}} W \|u\|.$$

因为  $\dot{V} = 2W\dot{W}$ , 除以  $2W$  得

$$\dot{W} \leq -\frac{c_3}{2c_2} W + \frac{c_4}{2\sqrt{c_1}} \|u\|.$$

令

$$a = \frac{c_3}{2c_2}, \quad b = \frac{c_4}{2\sqrt{c_1}}.$$

则

$$\dot{W} \leq -aW + b\|u\|.$$

比较方程为

$$\dot{z} = -az + b\|u(t)\|, \quad z(t_0) = W(t_0).$$

解为

$$z(t) = e^{-a(t-t_0)}W(t_0) + b \int_{t_0}^t e^{-a(t-s)} \|u(s)\| ds.$$

因此

$$W(t) \leq e^{-a(t-t_0)}W(t_0) + b(g * \|u\|)(t),$$

其中

$$g(t) = e^{-at}, \quad t \geq 0.$$

因为

$$\|g\|_1 = \int_0^\infty e^{-at} dt = \frac{1}{a},$$

Young 不等式给出

$$\|g * \|u\|\|_p \leq \frac{1}{a} \|u\|_p.$$

所以状态能量的平方根有  $\mathcal{L}_p$  上界。再用输出局部 Lipschitz, 例如

$$\|y\| \leq c_5 \|x\| + c_6 \|u\|,$$

以及

$$\|x\| \leq \frac{W}{\sqrt{c_1}},$$

可得输出的  $\mathcal{L}_p$  增益界。本节学习检查: 你应该能解释为什么要取  $W = \sqrt{V}$ : 因为  $V$  的导数不等式通常是二次型, 开方后变成一阶稳定滤波器, 才能直接和卷积  $\mathcal{L}_p$  增益连接。

### 3.3 $\mathcal{L}_2$ 增益与能量估计

#### 本节核心目标

本节专门讨论  $\mathcal{L}_2$  增益。 $\mathcal{L}_2$  增益衡量输入能量到输出能量的最大放大倍数。若零初值下

$$\|y\|_2 \leq \gamma \|u\|_2,$$

则  $\gamma$  是从输入到输出的能量增益上界。若初值非零, 通常会出现偏置:

$$\|y\|_2 \leq \gamma \|u\|_2 + \beta(x_0).$$

#### Theorem 5.4: LTI 系统的精确 $\mathcal{L}_2$ 增益

考虑

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du,$$

且  $A$  Hurwitz。传递函数

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

零初值时,  $\mathcal{L}_2$  增益是

$$\gamma_2 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|G(j\omega)\|_2.$$

这里  $\|G(j\omega)\|_2$  是矩阵诱导 2-范数, 也就是最大奇异值。

**Parseval 证明: 为什么频域最大奇异值就是能量增益**

零初值下, Fourier 变换满足

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega).$$

Parseval 等式给

$$\|y\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\omega)Y(j\omega)d\omega.$$

代入  $Y = GU$ :

$$Y^*Y = (GU)^*(GU) = U^*G^*GU.$$

由诱导 2-范数定义, 任意向量  $v$  满足

$$\|Gv\|_2 \leq \|G\|_2 \|v\|_2.$$

平方后:

$$v^*G^*Gv \leq \|G\|_2^2 v^*v.$$

令  $v = U(j\omega)$ , 得到

$$U^*G^*GU \leq \|G(j\omega)\|_2^2 U^*U.$$

所以

$$\|y\|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(j\omega)\|_2^2 U^*U d\omega.$$

把上确界提出:

$$\|y\|_2^2 \leq \left( \sup_{\omega} \|G(j\omega)\|_2^2 \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*U d\omega.$$

再次用 Parseval:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*U d\omega = \|u\|_2^2.$$

因此

$$\|y\|_2 \leq \left( \sup_{\omega} \|G(j\omega)\|_2 \right) \|u\|_2.$$

反方向的思想是选择频谱集中在达到最大奇异值的频率附近, 并沿对应右奇异向量方向输入。这样实际增益可以任意接近上确界, 所以该上界是精确的。

**Theorem 5.5: 非线性系统的 Hamilton-Jacobi 不等式**

考虑仿射输入系统

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad y = h(x).$$

其中  $f(0) = 0$ 、 $h(0) = 0$ 。若存在正半定函数  $V(x)$ ，使

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} G(x) G^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0, \quad (5.3-a)$$

则系统 finite-gain  $\mathcal{L}_2$  stable, 增益不超过  $\gamma$ 。

**逐步推导 Hamilton-Jacobi 条件如何给  $\mathcal{L}_2$  增益**

沿系统求导:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + G(x)u].$$

展开:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} G(x)u.$$

定义行向量

$$a(x) = \frac{\partial V}{\partial x} G(x).$$

则

$$\frac{\partial V}{\partial x} G(x)u = a(x)u.$$

Hamilton-Jacobi 不等式 (5.3-a) 可改写为

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq -\frac{1}{2\gamma^2} a(x)a^T(x) - \frac{1}{2} y^T y.$$

代入  $\dot{V}$ :

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2\gamma^2} aa^T - \frac{1}{2} y^T y + au.$$

现在处理

$$au - \frac{1}{2\gamma^2} aa^T.$$

使用完成平方。因为平方项非负:

$$0 \leq \frac{1}{2} \left( \gamma u - \frac{1}{\gamma} a^T \right)^T \left( \gamma u - \frac{1}{\gamma} a^T \right).$$

展开:

$$0 \leq \frac{1}{2} \gamma^2 u^T u - au + \frac{1}{2\gamma^2} aa^T.$$

把后两项移到另一边:

$$au - \frac{1}{2\gamma^2}aa^T \leq \frac{1}{2}\gamma^2u^T u.$$

因此

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2}\gamma^2u^T u - \frac{1}{2}y^T y. \quad (5.3-b)$$

从 0 到  $T$  积分:

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq \frac{1}{2}\gamma^2 \int_0^T u^T u dt - \frac{1}{2} \int_0^T y^T y dt.$$

整理:

$$\int_0^T y^T y dt \leq \gamma^2 \int_0^T u^T u dt + 2V(x(0)) - 2V(x(T)).$$

由于  $V \geq 0$ , 有  $-2V(x(T)) \leq 0$ , 所以

$$\|y_T\|_2^2 \leq \gamma^2 \|u_T\|_2^2 + 2V(x(0)).$$

取平方根, 并使用

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

得到

$$\|y_T\|_2 \leq \gamma \|u_T\|_2 + \sqrt{2V(x(0))}.$$

这就是 finite-gain  $\mathcal{L}_2$  stable, 增益不超过  $\gamma$ 。

**Example 5.8:** 非线性弹簧阻尼系统的  $\mathcal{L}_2$  增益系统为

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -ax_1^3 - kx_2 + u,$$

$$y = x_2,$$

其中  $a, k > 0$ 。取

$$V = \alpha \left( \frac{a}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2 \right), \quad \alpha > 0.$$

先计算梯度:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \alpha ax_1^3, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = \alpha x_2.$$

写成向量:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = [\alpha ax_1^3 \quad \alpha x_2].$$

无输入漂移项为

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -ax_1^3 - kx_2 \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h(x) = x_2.$$

计算第一项:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \alpha ax_1^3 x_2 + \alpha x_2 (-ax_1^3 - kx_2).$$

展开:

$$= \alpha ax_1^3 x_2 - \alpha ax_1^3 x_2 - \alpha kx_2^2.$$

前两项抵消:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) = -\alpha kx_2^2.$$

计算输入方向项:

$$\frac{\partial V}{\partial x} G(x) = [\alpha ax_1^3 \quad \alpha x_2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha x_2.$$

所以 Hamilton-Jacobi 左边为

$$-\alpha kx_2^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \alpha^2 x_2^2 + \frac{1}{2} x_2^2.$$

合并系数:

$$\left( -\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \right) x_2^2.$$

要使它对所有  $x_2$  非正, 需要

$$-\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \leq 0.$$

若选择

$$\alpha = \gamma^2 k,$$

则左边系数变为

$$-\gamma^2 k^2 + \frac{\gamma^4 k^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} = -\gamma^2 k^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 k^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \gamma^2 k^2).$$

因此只要

$$\gamma^2 k^2 \geq 1,$$

即

$$\gamma \geq \frac{1}{k},$$

Hamilton-Jacobi 不等式成立。于是  $\mathcal{L}_2$  增益不超过

$$\frac{1}{k}.$$

阻尼  $k$  越大，能量增益越小，这和物理直觉一致。

### 局部 $\mathcal{L}_2$ 增益：为什么需要 Lemma 5.1 和 5.2

Theorem 5.5 是全局结论。如果 Hamilton-Jacobi 不等式只在某个域  $D$  内成立，则还必须保证轨线不离开  $D$ 。主教材后续引入局部版本：

- 若无输入系统在域内渐近稳定；
- 若  $V$  的子水平集能困住轨线；
- 若输出零不能隐藏非零状态；

则可以得到 small-signal finite-gain  $\mathcal{L}_2$  stable。这和第 4 章逻辑完全一致：局部能量不等式需要局部不变集保障。

### 本节易错点

1.  $\mathcal{L}_2$  增益是能量增益，不是最大幅值增益。
2. LTI 系统的  $\mathcal{L}_2$  增益可以精确等于最大奇异值峰值；非线性系统通常只能通过  $V$  给上界。
3. Hamilton-Jacobi 不等式中的完成平方是核心步骤。
4. 初始状态非零时，偏置项来自储能  $V(x(0))$ 。

### 推导补充

$\mathcal{L}_2$  增益衡量的是能量放大。对零初始条件，若

$$\|y\|_2 \leq \gamma \|u\|_2,$$

则系统不会把输入能量放大超过  $\gamma^2$  倍。平方后是

$$\int_0^\infty y^T y dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty u^T u dt.$$

对 LTI 系统  $y = Gu$ ，Parseval 定理把时域能量变成频域能量：

$$\|y\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \|G(j\omega)U(j\omega)\|^2 d\omega.$$

对每个频率，矩阵最大奇异值定义给出

$$\|G(j\omega)U(j\omega)\| \leq \bar{\sigma}(G(j\omega)) \|U(j\omega)\|.$$

平方：

$$\|G(j\omega)U(j\omega)\|^2 \leq \bar{\sigma}^2(G(j\omega)) \|U(j\omega)\|^2.$$

若

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) \leq \gamma \quad \forall \omega,$$

则

$$\|y\|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2 \|U(j\omega)\|^2 d\omega = \gamma^2 \|u\|_2^2.$$

所以最小可能  $\gamma$  是

$$\sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)).$$

非线性系统没有传递函数, 所以改用储能函数。若存在  $V(x) \geq 0$ , 满足

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2}\gamma^2 u^T u - \frac{1}{2}y^T y,$$

从 0 到  $T$  积分:

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq \frac{1}{2}\gamma^2 \int_0^T u^T u dt - \frac{1}{2} \int_0^T y^T y dt.$$

移项:

$$\frac{1}{2} \int_0^T y^T y dt \leq \frac{1}{2}\gamma^2 \int_0^T u^T u dt + V(x(0)) - V(x(T)).$$

由于  $V(x(T)) \geq 0$ , 得到

$$\int_0^T y^T y dt \leq \gamma^2 \int_0^T u^T u dt + 2V(x(0)).$$

零初始时  $V(x(0)) = 0$ , 于是

$$\|y_T\|_2 \leq \gamma \|u_T\|_2.$$

Hamilton-Jacobi 不等式就是把上述耗散不等式对输入  $u$  的最坏情况内化。若系统是

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad y = h(x),$$

则

$$\dot{V} = V_x f + V_x G u.$$

希望对所有  $u$  有

$$V_x f + V_x G u \leq \frac{1}{2}\gamma^2 u^T u - \frac{1}{2}h^T h.$$

移到左边:

$$V_x f + V_x G u - \frac{1}{2}\gamma^2 u^T u + \frac{1}{2}h^T h \leq 0.$$

对  $u$  完成平方。令

$$a = V_x G.$$

则有关  $u$  的部分是

$$au - \frac{1}{2}\gamma^2 u^T u.$$

最大值在

$$u^* = \frac{1}{\gamma^2} a^T$$

处取得，最大值为

$$\frac{1}{2\gamma^2} aa^T.$$

所以只要

$$V_x f + \frac{1}{2\gamma^2} V_x G G^T V_x^T + \frac{1}{2} h^T h \leq 0,$$

则原耗散不等式对所有输入都成立。本节学习检查：你应该能从耗散不等式积分推出  $\mathcal{L}_2$  增益，并能用完成平方推导 Hamilton-Jacobi 不等式中的  $1/(2\gamma^2)$  项。

### 3.4 反馈系统与小增益定理

#### 本节核心目标

本节研究两个 finite-gain  $\mathcal{L}$  stable 系统组成反馈时，闭环是否仍然 finite-gain stable。核心结论是：若环路增益乘积小于 1，则闭环稳定。这是鲁棒控制的重要思想：一个扰动经过一圈反馈后如果被放大得更小，即

$$\gamma_1 \gamma_2 < 1,$$

那么内部信号不会在环路中自我放大。

#### 反馈结构和适定性

两个系统：

$$H_1 : \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q, \quad H_2 : \mathcal{L}_e^q \rightarrow \mathcal{L}_e^m.$$

内部关系为

$$y_1 = H_1 e_1, \quad y_2 = H_2 e_2.$$

反馈连接通常写成

$$e_1 = u_1 - y_2, \quad e_2 = u_2 + y_1.$$

适定性表示：给定外部输入  $(u_1, u_2)$ ，内部信号  $(e_1, e_2, y_1, y_2)$  存在且唯一。没有适定性，小增益不等式本身没有对象可谈。

**两个子系统的有限增益界**

假设

$$\|y_{1T}\| \leq \gamma_1 \|e_{1T}\| + \beta_1, \quad (5.4-a)$$

$$\|y_{2T}\| \leq \gamma_2 \|e_{2T}\| + \beta_2. \quad (5.4-b)$$

所有范数都是同一个信号空间  $\mathcal{L}$  上的截断范数。**Theorem 5.6: 小增益定理**

若

$$\gamma_1 \gamma_2 < 1,$$

则反馈连接 finite-gain  $\mathcal{L}$  stable。**完整推导：先界住  $e_1$** 

由

$$e_1 = u_1 - y_2$$

取截断范数：

$$\|e_{1T}\| = \|(u_1 - y_2)_T\|.$$

因为截断线性，

$$(u_1 - y_2)_T = u_{1T} - y_{2T}.$$

用三角不等式：

$$\|e_{1T}\| \leq \|u_{1T}\| + \|y_{2T}\|.$$

用 (5.4-b)：

$$\|e_{1T}\| \leq \|u_{1T}\| + \gamma_2 \|e_{2T}\| + \beta_2. \quad (5.4-c)$$

再由

$$e_2 = u_2 + y_1$$

得到

$$\|e_{2T}\| \leq \|u_{2T}\| + \|y_{1T}\|.$$

用 (5.4-a)：

$$\|e_{2T}\| \leq \|u_{2T}\| + \gamma_1 \|e_{1T}\| + \beta_1. \quad (5.4-d)$$

把 (5.4-d) 代入 (5.4-c)：

$$\|e_{1T}\| \leq \|u_{1T}\| + \gamma_2 (\|u_{2T}\| + \gamma_1 \|e_{1T}\| + \beta_1) + \beta_2.$$

展开:

$$\|e_{1T}\| \leq \|u_{1T}\| + \gamma_2 \|u_{2T}\| + \gamma_1 \gamma_2 \|e_{1T}\| + \gamma_2 \beta_1 + \beta_2.$$

移项:

$$\|e_{1T}\| - \gamma_1 \gamma_2 \|e_{1T}\| \leq \|u_{1T}\| + \gamma_2 \|u_{2T}\| + \gamma_2 \beta_1 + \beta_2.$$

提取公因子:

$$(1 - \gamma_1 \gamma_2) \|e_{1T}\| \leq \|u_{1T}\| + \gamma_2 \|u_{2T}\| + \gamma_2 \beta_1 + \beta_2.$$

因为  $\gamma_1 \gamma_2 < 1$ , 所以  $1 - \gamma_1 \gamma_2 > 0$ . 两边除以它:

$$\|e_{1T}\| \leq \frac{\|u_{1T}\| + \gamma_2 \|u_{2T}\| + \gamma_2 \beta_1 + \beta_2}{1 - \gamma_1 \gamma_2}. \quad (5.4-e)$$

**同理界住  $e_2$**

把 (5.4-c) 代入 (5.4-d), 可得

$$\|e_{2T}\| \leq \frac{\|u_{2T}\| + \gamma_1 \|u_{1T}\| + \beta_1 + \gamma_1 \beta_2}{1 - \gamma_1 \gamma_2}. \quad (5.4-f)$$

因此内部误差信号  $e_1, e_2$  都被外部输入  $u_1, u_2$  有限增益地界住。

**从  $e$  到  $y$**

由子系统增益界:

$$\|y_{1T}\| \leq \gamma_1 \|e_{1T}\| + \beta_1,$$

$$\|y_{2T}\| \leq \gamma_2 \|e_{2T}\| + \beta_2.$$

将 (5.4-e)、(5.4-f) 代入, 即可得到输出  $y_1, y_2$  对输入  $u_1, u_2$  的有限增益界。所以从  $u$  到  $e$  稳定, 也从  $u$  到  $y$  稳定。

**为什么  $u \rightarrow e$  与  $u \rightarrow y$  等价**

由反馈关系:

$$e_1 = u_1 - y_2, \quad e_2 = u_2 + y_1.$$

若  $(u_1, u_2) \rightarrow (y_1, y_2)$  finite-gain stable, 则

$$\|e_{1T}\| \leq \|u_{1T}\| + \|y_{2T}\|,$$

$$\|e_{2T}\| \leq \|u_{2T}\| + \|y_{1T}\|,$$

所以  $(u_1, u_2) \rightarrow (e_1, e_2)$  也 finite-gain stable。反过来, 如果  $(u_1, u_2) \rightarrow (e_1, e_2)$  finite-gain stable, 则由

$$y_1 = H_1 e_1, \quad y_2 = H_2 e_2$$

和  $H_1, H_2$  的 finite-gain stable, 可得  $(u_1, u_2) \rightarrow (y_1, y_2)$  finite-gain stable。

**鲁棒性解释**

把  $H_1$  看作名义系统, 把  $H_2$  看作未建模动态或不确定性。若名义系统增益为  $\gamma_1$ , 不确定性增益为  $\gamma_2$ , 则闭环稳定条件是

$$\gamma_1 \gamma_2 < 1.$$

若  $\gamma_2$  很小, 也就是不确定性弱, 那么稳定性保持。这个思想是鲁棒控制的核心之一。

**Example 5.13: LTI 系统加静态非线性扰动**

若  $H_1$  是稳定 LTI 系统, 传递矩阵为  $G(s)$ , 则其  $\mathcal{L}_2$  增益为

$$\gamma_1 = \sup_{\omega} \|G(j\omega)\|_2.$$

若  $H_2$  是记忆无关非线性, 满足 Lipschitz 型界

$$\|\psi(t, e_2)\| \leq \gamma_2 \|e_2\|,$$

则  $H_2$  的  $\mathcal{L}_2$  增益不超过  $\gamma_2$ 。若

$$\left( \sup_{\omega} \|G(j\omega)\|_2 \right) \gamma_2 < 1,$$

反馈闭环 finite-gain  $\mathcal{L}_2$  stable。

**本节易错点**

1. 小增益条件是充分条件, 可能保守。
2. 必须假设反馈适定, 否则内部信号可能不存在或不唯一。
3. 增益乘积小于 1 是环路条件, 不要求每个系统单独增益都小于 1。
4. 小增益定理是输入输出工具; 它不直接告诉你状态是否渐近收敛, 除非输出信号包含足够状态信息。

**推导补充**

Small-gain theorem 研究反馈互联。设两个系统增益分别为  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 。负反馈中内部信号满足类似

$$e_1 = u_1 - y_2, \quad e_2 = u_2 + y_1,$$

并且

$$\|y_1\| \leq \gamma_1 \|e_1\| + \beta_1,$$

$$\|y_2\| \leq \gamma_2 \|e_2\| + \beta_2.$$

为了界住  $e_1$ , 从

$$e_1 = u_1 - y_2$$

取范数:

$$\|e_1\| \leq \|u_1\| + \|y_2\|.$$

代入  $y_2$  的增益界:

$$\|e_1\| \leq \|u_1\| + \gamma_2 \|e_2\| + \beta_2.$$

由

$$e_2 = u_2 + y_1$$

得

$$\|e_2\| \leq \|u_2\| + \|y_1\|.$$

再代入  $y_1$ :

$$\|e_2\| \leq \|u_2\| + \gamma_1 \|e_1\| + \beta_1.$$

把这个放回  $e_1$  不等式:

$$\|e_1\| \leq \|u_1\| + \gamma_2 (\|u_2\| + \gamma_1 \|e_1\| + \beta_1) + \beta_2.$$

展开:

$$\|e_1\| \leq \gamma_1 \gamma_2 \|e_1\| + \|u_1\| + \gamma_2 \|u_2\| + \gamma_2 \beta_1 + \beta_2.$$

把含  $e_1$  的项移到左边:

$$(1 - \gamma_1 \gamma_2) \|e_1\| \leq \|u_1\| + \gamma_2 \|u_2\| + \gamma_2 \beta_1 + \beta_2.$$

只有当

$$\gamma_1 \gamma_2 < 1$$

时, 左边系数为正, 才能除过去:

$$\|e_1\| \leq \frac{\|u_1\| + \gamma_2 \|u_2\| + \gamma_2 \beta_1 + \beta_2}{1 - \gamma_1 \gamma_2}.$$

同理可以界住  $e_2$ 。然后由

$$\|y_1\| \leq \gamma_1 \|e_1\| + \beta_1, \quad \|y_2\| \leq \gamma_2 \|e_2\| + \beta_2$$

得到输出界。这就是 small-gain 的全部代数核心: 每绕环一圈, 误差被乘以  $\gamma_1 \gamma_2$ 。若乘积小于 1, 反馈循环的影响形成收敛几何级数; 若大于等于 1, 单靠增益信息无法保证内部信号有界。本节学习检查: 你应该能独立完成从  $e_1, e_2$  到  $(1 - \gamma_1 \gamma_2) \|e_1\|$  的代数移项, 并能解释为什么适定性和小增益条件是不同的要求。

### 3.5 本章习题与训练

#### 本节核心目标

第 5 章习题训练四种能力:

1. 用定义判断  $\mathcal{L}$  stable 与 finite-gain stable。
2. 计算串联、并联、反馈的增益界。
3. 对记忆无关非线性判断  $\mathcal{L}_\infty$ 、 $\mathcal{L}_2$  稳定。
4. 用 Hamilton-Jacobi 或 storage-like 函数估计  $\mathcal{L}_2$  增益。

**代表题 1: 串联系统**

若

$$\|H_1 u\| \leq \gamma_1 \|u\| + \beta_1,$$

$$\|H_2 v\| \leq \gamma_2 \|v\| + \beta_2,$$

串联系统为

$$y = H_2(H_1 u).$$

令

$$v = H_1 u.$$

则

$$\|y\| \leq \gamma_2 \|v\| + \beta_2.$$

代入  $v$  的界:

$$\|y\| \leq \gamma_2(\gamma_1 \|u\| + \beta_1) + \beta_2.$$

展开:

$$\|y\| \leq \gamma_1 \gamma_2 \|u\| + \gamma_2 \beta_1 + \beta_2.$$

所以串联系统 finite-gain stable, 增益不超过  $\gamma_1 \gamma_2$ 。

**代表题 2: 并联系统**

并联系统输出为

$$y = H_1 u + H_2 u.$$

由三角不等式:

$$\|y\| \leq \|H_1 u\| + \|H_2 u\|.$$

代入增益界:

$$\|y\| \leq \gamma_1 \|u\| + \beta_1 + \gamma_2 \|u\| + \beta_2.$$

合并:

$$\|y\| \leq (\gamma_1 + \gamma_2) \|u\| + \beta_1 + \beta_2.$$

并联系统增益不超过  $\gamma_1 + \gamma_2$ 。

**代表题 3:**  $y = u^{1/3}$  的 bias 作用

对

$$y = u^{1/3},$$

有

$$\|y\|_\infty = \|u\|_\infty^{1/3}.$$

所以它是  $\mathcal{L}_\infty$  stable, 可取

$$\alpha(r) = r^{1/3}.$$

它也可以是 finite-gain  $\mathcal{L}_\infty$  stable, 但需要 bias。给定任意  $a > 0$ , 希望找  $\beta$ , 使

$$r^{1/3} \leq ar + \beta, \quad r \geq 0.$$

令

$$\phi(r) = r^{1/3} - ar.$$

求最大值。导数为

$$\phi'(r) = \frac{1}{3}r^{-2/3} - a.$$

令  $\phi'(r) = 0$ :

$$\frac{1}{3}r^{-2/3} = a.$$

所以

$$r^{-2/3} = 3a, \quad r^{2/3} = \frac{1}{3a}, \quad r = \left(\frac{1}{3a}\right)^{3/2}.$$

代回可得到一个有限最大值。因此只要  $\beta$  取不小于这个最大值, 就有

$$\|y\|_\infty \leq a\|u\|_\infty + \beta.$$

这个例子说明 bias term 不只是处理零输入非零输出, 也能把某些次线性非线性纳入 finite-gain 形式。

**代表题 4:** 用 Hamilton-Jacobi 估计  $\mathcal{L}_2$  增益

遇到

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad y = h(x),$$

习题常规路线是:

1. 猜  $V(x) \geq 0$ 。
2. 计算  $\frac{\partial V}{\partial x} f(x)$ 。
3. 计算  $\frac{\partial V}{\partial x} G(x)$ 。
4. 代入

$$\frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} G G^T \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T h \leq 0.$$

5. 解出允许的最小  $\gamma$ 。

这类题的关键不是求解微分方程，而是把能量不等式配成  $u^T u - y^T y$  的形式。

### 推导补充

第 5 章习题可以按四类训练。第一类：串联系统。若

$$\|y_1\| \leq \gamma_1 \|u\| + \beta_1$$

且

$$\|y_2\| \leq \gamma_2 \|y_1\| + \beta_2,$$

则

$$\|y_2\| \leq \gamma_2 (\gamma_1 \|u\| + \beta_1) + \beta_2 = \gamma_1 \gamma_2 \|u\| + \gamma_2 \beta_1 + \beta_2.$$

串联增益相乘，偏置按后级增益放大后相加。第二类：并联系统。若输出相加

$$y = y_1 + y_2,$$

则

$$\|y\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|.$$

代入两个系统界：

$$\|y\| \leq (\gamma_1 + \gamma_2) \|u\| + \beta_1 + \beta_2.$$

并联增益相加。第三类：记忆无关非线性。判断  $y = h(u)$  的 finite-gain，核心是找是否存在全局线性增长界

$$\|h(u)\| \leq \gamma \|u\| + \beta.$$

例如  $h(u) = u^2$  对  $\mathcal{L}_\infty$  可把有界输入映成有界输出，但不存在全局有限增益，因为

$$\frac{|u|^2}{|u|} = |u| \rightarrow \infty.$$

第四类：Hamilton-Jacobi 估计  $\mathcal{L}_2$  增益。流程固定：

1. 选  $V(x) \geq 0$ 。
2. 计算  $V_x f$ 、 $V_x G$ 、 $h^T h$ 。
3. 代入

$$V_x f + \frac{1}{2\gamma^2} V_x G G^T V_x^T + \frac{1}{2} h^T h \leq 0.$$

4. 把结果整理成关于状态的多项式或二次型不等式。

5. 解出允许的  $\gamma$ 。

本节学习检查: 你应该能看见一个互连系统题, 就先判断是串联、并联、反馈还是静态非线性, 再选择增益相乘、相加、小增益或增长界工具。

## 3.6 证明细节与理解补充

第五章从状态轨线转向外部信号。核心问题是: 输入信号属于某个函数空间时, 输出是否也属于同一类空间, 并且输出大小能否由输入大小控制。

## 3.6.1 信号空间与截断算子

对信号  $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 定义截断信号

$$u_T(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

扩展空间  $\mathcal{L}_{pe}$  的含义是: 对每个有限  $T$ , 截断  $u_T$  属于  $\mathcal{L}_p$ 。这允许信号在无限时间上不一定有有限范数, 但在每个有限窗口上可度量。

**定义 3.2 (有限增益稳定).** 算子  $H: \mathcal{L}_{pe} \rightarrow \mathcal{L}_{pe}$  称为有限增益  $\mathcal{L}_p$  稳定, 如果存在常数  $\gamma \geq 0$  和  $\beta \geq 0$ , 使得对所有  $u$  和所有  $T$ , 有

$$\|(Hu)_T\|_p \leq \gamma \|u_T\|_p + \beta.$$

若  $\beta = 0$ , 则称零状态有限增益稳定。

偏置项  $\beta$  通常来自初始条件或储能。若系统从非零状态出发, 即使输入为零, 输出也可能有一段自由响应, 因此不能要求  $\|y\| \leq \gamma \|u\|$ 。

3.6.2 线性系统的  $\mathcal{L}_2$  增益

对稳定 LTI 系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du,$$

传递矩阵为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

若  $A$  Hurwitz, 则零初值下

$$\|y\|_2 \leq \|G\|_\infty \|u\|_2,$$

其中

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)).$$

推导依赖 Parseval 定理。零初值下频域关系为

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega).$$

于是

$$\|Y(j\omega)\| \leq \bar{\sigma}(G(j\omega)) \|U(j\omega)\| \leq \|G\|_\infty \|U(j\omega)\|.$$

平方并积分,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|Y(j\omega)\|^2 d\omega \leq \|G\|_\infty^2 \int_{-\infty}^{\infty} \|U(j\omega)\|^2 d\omega.$$

由 Parseval 定理, 两边除以  $2\pi$  即得时域  $\mathcal{L}_2$  增益界。

### 3.6.3 状态模型 $\mathcal{L}_\infty$ 稳定的 Lyapunov 证明

考虑

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad y = h(t, x, u).$$

若无输入系统  $\dot{x} = f(t, x, 0)$  一致渐近稳定，并存在 Lyapunov 函数满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) \leq -W_3(x),$$

而输入项满足线性增长约束，则可以证明状态由输入有界控制。典型推导中把  $V$  的平方根作为新的量：

$$W(t) = \sqrt{V(t, x(t))}.$$

若  $V$  二次有界， $W$  与  $\|x\|$  等价。对  $W$  求导：

$$\dot{W} = \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}}.$$

通过估计输入项，可得到

$$\dot{W} \leq -aW + b\|u\|.$$

解这个一阶线性微分不等式：

$$W(t) \leq e^{-a(t-t_0)}W(t_0) + b \int_{t_0}^t e^{-a(t-s)}\|u(s)\|ds.$$

若  $u \in \mathcal{L}_\infty$ ，则

$$W(t) \leq W(t_0) + \frac{b}{a}\|u\|_\infty.$$

再由  $\|y\| \leq c_1\|x\| + c_2\|u\|$  得到  $\mathcal{L}_\infty$  稳定。

### 3.6.4 Hamilton–Jacobi 不等式与 $\mathcal{L}_2$ 增益

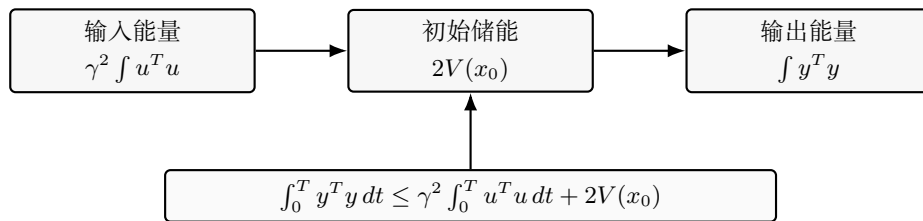


图 3.3 Hamilton–Jacobi 不等式对应的能量预算。

对仿射系统

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad y = h(x),$$

若存在  $V(x) \geq 0$  满足

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} G(x)G^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T(x)h(x) \leq 0,$$

则系统具有  $\mathcal{L}_2$  增益不超过  $\gamma$ 。证明的关键是完成平方。沿轨线，

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} G(x)u.$$

记

$$a(x) = \frac{\partial V}{\partial x} G(x).$$

Hamilton–Jacobi 不等式给出

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq -\frac{1}{2\gamma^2} a(x)a^T(x) - \frac{1}{2}y^T y.$$

因此

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2\gamma^2} aa^T + au - \frac{1}{2}y^T y.$$

对中间两项完成平方:

$$-\frac{1}{2\gamma^2} aa^T + au = -\frac{1}{2\gamma^2} \|a - \gamma^2 u^T\|^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 u^T u \leq \frac{1}{2}\gamma^2 u^T u.$$

所以

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2}\gamma^2 u^T u - \frac{1}{2}y^T y.$$

积分得

$$\int_0^T y^T y dt \leq \gamma^2 \int_0^T u^T u dt + 2V(x(0)) - 2V(x(T)).$$

若  $V \geq 0$ , 则

$$\|y_T\|_2^2 \leq \gamma^2 \|u_T\|_2^2 + 2V(x(0)).$$

零初值时得到  $\|y_T\|_2 \leq \gamma \|u_T\|_2$ 。

### 3.6.5 小增益定理的代数证明

考虑反馈互联

$$\begin{aligned} y_1 &= H_1 e_1, & y_2 &= H_2 e_2, \\ e_1 &= u_1 - y_2, & e_2 &= u_2 + y_1. \end{aligned}$$

假设

$$\|y_1\| \leq \gamma_1 \|e_1\| + \beta_1, \quad \|y_2\| \leq \gamma_2 \|e_2\| + \beta_2.$$

由互联关系,

$$\|e_1\| \leq \|u_1\| + \|y_2\|, \quad \|e_2\| \leq \|u_2\| + \|y_1\|.$$

代入第一条:

$$\|y_1\| \leq \gamma_1 \|u_1\| + \gamma_1 \|y_2\| + \beta_1.$$

再代入  $y_2$  的增益界:

$$\|y_1\| \leq \gamma_1 \|u_1\| + \gamma_1 (\gamma_2 \|u_2\| + \gamma_2 \|y_1\| + \beta_2) + \beta_1.$$

整理:

$$(1 - \gamma_1 \gamma_2) \|y_1\| \leq \gamma_1 \|u_1\| + \gamma_1 \gamma_2 \|u_2\| + \gamma_1 \beta_2 + \beta_1.$$

若

$$\gamma_1 \gamma_2 < 1,$$

则可以除以正数  $1 - \gamma_1 \gamma_2$ , 得到  $y_1$  有界。类似可得  $y_2, e_1, e_2$  都有界。这就是小增益定理的核心。

**注 3.2 (为什么条件是乘积小于一).** 反馈回路会把  $H_1$  的输出送入  $H_2$ , 再送回  $H_1$ 。沿回路传播一圈, 信号大小最多被放大  $\gamma_1 \gamma_2$  倍。若乘积小于一, 反复循环形成收敛几何级数; 若乘积大于一, 回路可能自激放大。

### 3.6.6 小信号稳定与大范围稳定的区别

小信号输入输出稳定只要求在初始状态和输入足够小时成立。它依赖局部 Lipschitz、局部 Lyapunov 函数和局部不变集。大范围或全局输入输出稳定要求估计对所有初始状态和输入成立, 通常需要全局 ISS、全局径向无界 Lyapunov 函数或全局增长条件。工程上, 线性化模型通常只能给出小信号增益。若要说明大扰动下安全, 必须额外证明轨线不会离开有效区域。否则即使小信号增益很小, 大扰动仍可能把系统推到非线性强烈区域而失稳。

## 3.7 统一观点: 从范数增益到能量不等式

**注 3.3 (统一视角).** Lyapunov 方法、输入-输出增益和无源性并不是三套彼此孤立的语言。它们都通过构造一个可估计的量来控制轨线或信号: Lyapunov 方法关注状态能量, 输入-输出稳定关注信号范数, 无源性关注储能函数与供给率之间的能量预算。

### 3.7.1 输入-输出稳定与无源性的统一观点

第 5 章的关键词是“增益”。 $\mathcal{L}_\infty$  增益控制峰值,  $\mathcal{L}_2$  增益控制能量; Theorem 5.1 用 Lyapunov 函数把状态模型转成稳定卷积滤波器; Theorem 5.5 用 Hamilton-Jacobi 不等式把非线性系统变成耗散不等式; 小增益定理说明两个有限增益系统反馈时, 只要环路增益小于 1, 内部信号就不会自我放大。

第 6 章的关键词是“能量”。Passivity 不是单纯的增益小, 而是输入功率不能小于储能增长。Positive real/KYP lemma 说明线性系统频域相位条件与时域 storage function 是同一件事; output strict passivity 给出  $\mathcal{L}_2$  增益; passivity feedback theorem 说明被动系统互联时内部功率抵消, storage functions 可以相加。这就是被动性在电路、机械、机器人和非线性控制中如此常用的原因。

### 3.7.2 例题七: 非线性弹簧阻尼系统的 $\mathcal{L}_2$ 增益

考虑

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -ax_1^3 - kx_2 + u, \quad y = x_2,$$

其中  $a, k > 0$ 。取

$$V = \alpha \left( \frac{a}{4} x_1^4 + \frac{1}{2} x_2^2 \right).$$

计算

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \alpha a x_1^3, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = \alpha x_2.$$

沿系统轨线

$$\dot{V} = \alpha a x_1^3 x_2 + \alpha x_2 (-a x_1^3 - k x_2 + u).$$

展开:

$$\dot{V} = \alpha a x_1^3 x_2 - \alpha a x_1^3 x_2 - \alpha k x_2^2 + \alpha x_2 u.$$

抵消后

$$\dot{V} = -\alpha k y^2 + \alpha y u.$$

若要证明增益不超过  $\gamma$ , 希望有

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2} \gamma^2 u^2 - \frac{1}{2} y^2.$$

因此需要

$$-\alpha k y^2 + \alpha y u \leq \frac{1}{2} \gamma^2 u^2 - \frac{1}{2} y^2.$$

把右边移到左边：

$$\left(-\alpha k + \frac{1}{2}\right)y^2 + \alpha y u - \frac{1}{2}\gamma^2 u^2 \leq 0.$$

对  $u$  完成平方或要求该二次型非正。选择  $\alpha = \gamma^2 k$  时，Hamilton–Jacobi 条件给出  $\gamma \geq 1/k$ 。因此系统的  $\mathcal{L}_2$  增益上界可取  $1/k$ 。阻尼越大，能量增益越小。

### 3.7.3 例题八：小增益定理的数值判断

设两个子系统的增益分别为

$$\gamma_1 = 0.6, \quad \gamma_2 = 1.4.$$

则

$$\gamma_1 \gamma_2 = 0.84 < 1.$$

反馈互联系统满足小增益条件。若外部输入范数满足  $\|u_1\| \leq M_1$ 、 $\|u_2\| \leq M_2$ ，并忽略偏置项，则前面的推导给出

$$\|y_1\| \leq \frac{\gamma_1 M_1 + \gamma_1 \gamma_2 M_2}{1 - \gamma_1 \gamma_2}.$$

代入数值：

$$\|y_1\| \leq \frac{0.6M_1 + 0.84M_2}{0.16} = 3.75M_1 + 5.25M_2.$$

虽然闭环稳定，但上界可能很大。这说明小增益定理是充分条件；接近  $\gamma_1 \gamma_2 = 1$  时，稳定裕度小，估计会变保守。

## 3.8 本章自检

### 3.8.1 第五章自检

1. 能解释  $\mathcal{L}_2$ 、 $\mathcal{L}_\infty$  和扩展空间  $\mathcal{L}_{pe}$  的区别。
2. 能说明有限增益中的偏置项来自初始条件或储能。
3. 能用 Parseval 定理说明 LTI 系统  $\mathcal{L}_2$  增益与  $H_\infty$  范数的关系。
4. 能从 Hamilton–Jacobi 不等式一步步推出  $\mathcal{L}_2$  增益界。
5. 能写出小增益定理中内部信号的代数不等式，并说明为什么需要  $\gamma_1 \gamma_2 < 1$ 。

## 无源性：储能函数、正实性与反馈稳定

本章把前面两种语言统一起来：Lyapunov 方法关注状态能量，输入-输出方法关注端口信号，而无源性用“储能函数不超过外部供给能量”把两者连接起来。对物理系统而言，无源系统只能储存或消耗能量，不能凭空产生能量；对抽象控制系统而言，无源性是一类特殊但极其有用的耗散不等式。

本章按照从简单到一般的顺序展开。先从无记忆非线性和扇区条件理解端口功率，再进入状态模型的储能函数；随后讨论线性系统中无源性与正实传递函数、KYP 引理的等价关系；最后证明无源反馈互联定理，说明为什么两个端口功率相互抵消后，闭环总储能会下降。读完本章，应当能把“能量”“正实”“KYP”“反馈稳定”看成同一件事的四种表达。

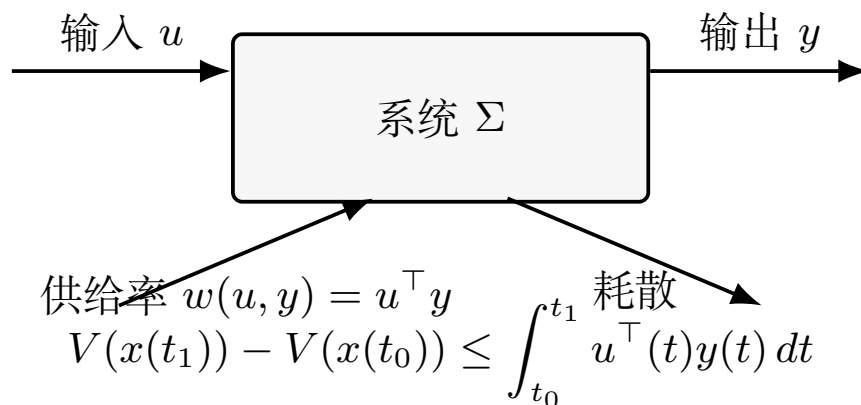


图 4.1 无源性的储能函数与供给率关系。

第 6 章用能量观点统一 Lyapunov 稳定、 $\mathcal{L}_2$  增益和反馈互联。Passivity 的核心不等式是

$$\text{输入功率} \geq \text{储能增长率} + \text{耗散项}.$$

在电路中，输入电压乘输入电流是功率；在机械系统中，力乘速度是功率；在机器人中，关节力矩乘关节速度是功率。只要系统不能凭空产生能量，它就具有被动性。本章逻辑按原文小节是：

1. 6.1 从记忆无关函数定义 passivity 和 sector。
2. 6.2 把 passivity 推广到有状态的动态系统。
3. 6.3 用 positive real transfer functions 刻画线性系统 passivity。
4. 6.4 说明 passivity 如何推出  $\mathcal{L}_2$  稳定和 Lyapunov 稳定。
5. 6.5 给出 passivity feedback theorems。
6. 6.6 用习题训练 sector 变换、KYP、机器人和刚体能量法。

**定义 4.1 (无源性).** 系统  $\Sigma$  对供给率  $u^\top y$  无源，是指存在非负储能函数  $V(x)$ ，使得任意  $t_1 \geq t_0$  都有  $V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} u^\top(t)y(t) dt$ 。若还含有  $-\rho\|y\|^2$  或  $-v\|u\|^2$  项，则分别对应输出严格无源或输入严格无源。

**引理 4.1 (正实函数与 KYP 思想).** 对最小实现的稳定 LTI 系统，频域正实性与存在二次型储能函数之间等价；这就是正实引理或 KYP 引理的核心内容。

**命题 4.1 (输出严格无源与  $\mathcal{L}_2$  增益).** 若系统满足  $\dot{V} \leq u^\top y - \rho\|y\|^2$  且  $\rho > 0$ ，则由 Young 不等式可推出从  $u$  到  $y$  的有限  $\mathcal{L}_2$  增益。

**定理 4.1 (无源反馈定理).** 两个无源系统在负反馈互联下保持无源；若附加适当严格性与可观测性条件，则闭环平衡点可得渐近稳定。

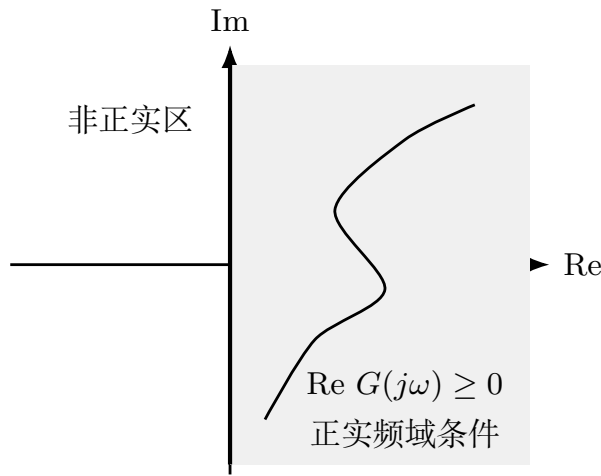


图 4.2 SISO 正实函数的频域几何解释。

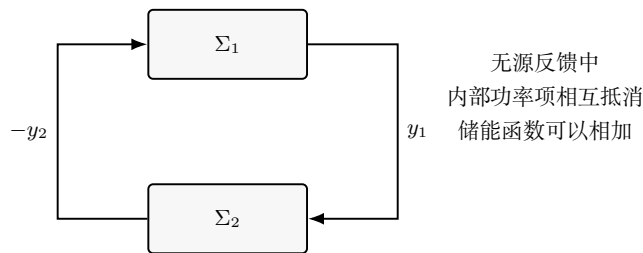


图 4.3 无源反馈互联中内部功率项的抵消结构。

### 4.1 记忆无关函数的无源性

#### 本节核心目标

本节研究记忆无关函数

$$y = h(t, u), \quad h : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

它没有状态，没有储能，因此 passivity 退化为“瞬时输入功率非负”。

**从电阻理解 passivity**

一端口电阻的输入可以取为电压  $u$ ，输出取为电流  $y$ 。流入元件的瞬时功率是

$$p = uy.$$

若

$$uy \geq 0$$

对所有工作点成立，则元件不会向外提供净功率，称为 passive。线性电阻满足欧姆定律

$$y = Gu,$$

其中  $G = 1/R$  是电导。若  $R > 0$ ，则  $G > 0$ ，于是

$$uy = u(Gu) = Gu^2 \geq 0.$$

若  $u \neq 0$ ，还有  $Gu^2 > 0$ ，说明它不仅 passive，而且有耗散。

**passivity 不等于单调性**

标量 passive 只要求  $u$  与  $y$  同号，即图像位于第一、第三象限。它不要求曲线斜率处处非负。某些隧道二极管特性可能局部负斜率，但只要整体仍满足  $uy \geq 0$ ，仍是 passive。负电阻则会在某些区域满足  $uy < 0$ ，意味着元件向外供能，不是 passive。

**向量情形**

若

$$u, y \in \mathbb{R}^p,$$

流入功率定义为内积

$$u^T y = \sum_{i=1}^p u_i y_i.$$

记忆无关函数 passive，若

$$u^T h(t, u) \geq 0, \quad \forall (t, u). \quad (6.1-a)$$

如果函数解耦：

$$h(t, u) = \begin{bmatrix} h_1(t, u_1) \\ \vdots \\ h_p(t, u_p) \end{bmatrix},$$

则

$$u^T h(t, u) = \sum_{i=1}^p u_i h_i(t, u_i).$$

只要每个分量满足  $u_i h_i(t, u_i) \geq 0$ ，整体就 passive。

**lossless: 理想变压器的反对称矩阵**

若

$$u^T y = 0$$

对所有  $u$  成立，则称为 lossless。理想变压器可抽象成

$$y = Su,$$

其中

$$S^T = -S.$$

计算功率：

$$u^T y = u^T Su.$$

由于  $u^T Su$  是标量，等于自己的转置：

$$u^T Su = (u^T Su)^T.$$

转置右边：

$$(u^T Su)^T = u^T S^T u.$$

由  $S^T = -S$ ：

$$u^T S^T u = u^T (-S)u = -u^T Su.$$

因此

$$u^T Su = -u^T Su.$$

两边相加：

$$2u^T Su = 0.$$

所以

$$u^T y = u^T Su = 0.$$

这说明反对称耦合只交换能量，不消耗也不产生能量。

**input-feedforward passive 与 input strictly passive**

若存在函数  $\varphi(u)$ ，使

$$u^T y \geq u^T \varphi(u), \quad (6.1-b)$$

则系统有 input-feedforward passivity 结构。若进一步

$$u^T \varphi(u) > 0, \quad u \neq 0,$$

则称 input strictly passive。最常见情形是

$$\varphi(u) = cu, \quad c > 0.$$

此时

$$u^T \varphi(u) = cu^T u = c\|u\|^2.$$

所以

$$u^T y \geq c\|u\|^2.$$

这表示系统不仅不产生能量，而且至少按输入强度耗散一部分能量。若  $c < 0$ ，则

$$u^T y \geq c\|u\|^2$$

允许右边为负，代表 passivity shortage。它不保证 passive，但说明“缺多少被动性”。后面反馈互联中，一个系统的 shortage 可以被另一个系统的 excess 补偿。

### output-feedback passive 与 output strictly passive

若存在  $\rho(y)$ ，使

$$u^T y \geq y^T \rho(y), \quad (6.1-c)$$

则称 output-feedback passive。若

$$y^T \rho(y) > 0, \quad y \neq 0,$$

则称 output strictly passive。典型情形  $\rho(y) = \delta y$ ， $\delta > 0$ ，给出

$$u^T y \geq \delta\|y\|^2.$$

这在第 6.4 节非常关键，因为它能直接推出  $\mathcal{L}_2$  增益界。

### 输入前馈和输出反馈如何消除 excess/shortage

若

$$u^T y \geq u^T \varphi(u),$$

定义新输出

$$\tilde{y} = y - \varphi(u).$$

则

$$u^T \tilde{y} = u^T y - u^T \varphi(u) \geq 0.$$

所以通过 input feedforward，可把原系统变成 sector  $[0, \infty]$  的 passive 函数。若

$$u^T y \geq y^T \rho(y),$$

定义新输入

$$\tilde{u} = u - \rho(y).$$

则

$$\tilde{u}^T y = (u - \rho(y))^T y = u^T y - y^T \rho(y) \geq 0.$$

所以通过 output feedback, 也能得到 passive 形式。

**sector 条件：标量情形**

标量函数属于 sector  $[\alpha, \beta]$ , 若

$$(h(t, u) - \alpha u)(h(t, u) - \beta u) \leq 0, \quad \beta \geq \alpha. \quad (6.1-d)$$

当  $u > 0$  时, 若  $h$  位于两条直线之间:

$$\alpha u \leq h(t, u) \leq \beta u,$$

则第一个因子非负, 第二个因子非正, 乘积非正。当  $u < 0$  时, 不等式方向会反过来, 但几何含义仍然是图像落在两条射线形成的扇形区域内。passive 对应 sector  $[0, \infty]$ 。若  $h \in [\alpha, \beta]$ , 可同时理解为:

- 相对  $\alpha u$  有 input-feedforward passivity;
- 相对上界  $\beta u$  有 output-side 限制。

**sector 条件：向量情形**

向量函数属于 sector  $[K_1, K_2]$ , 若

$$[h(t, u) - K_1 u]^T [h(t, u) - K_2 u] \leq 0, \quad (6.1-e)$$

其中

$$K = K_2 - K_1 = K^T > 0.$$

令

$$\tilde{y} = h(t, u) - K_1 u.$$

则

$$h(t, u) - K_2 u = h(t, u) - K_1 u - (K_2 - K_1)u = \tilde{y} - Ku.$$

sector 条件变成

$$\tilde{y}^T (\tilde{y} - Ku) \leq 0.$$

等价于

$$\tilde{y}^T (Ku - \tilde{y}) \geq 0. \quad (6.1-f)$$

若定义变换后的输入输出为

$$\tilde{u} = Ku - \tilde{y}, \quad \tilde{y} = \tilde{y},$$

则

$$\bar{u}^T \bar{y} = (Ku - \tilde{y})^T \tilde{y} = \tilde{y}^T (Ku - \tilde{y}) \geq 0.$$

所以 sector  $[K_1, K_2]$  可以经由输入前馈和平移/反馈变换成 passive 形式。这就是第 6.5 节 loop transformation 的代数基础。

### 本节易错点

1. Passive 是功率不等式，不是斜率非负。
2. Lossless 表示功率恒为零，不表示信号为零。
3. input strict 和 output strict 分别约束输入和输出，后续推出的稳定结论不同。
4. Sector 变换的本质是把扇形约束转成  $\bar{u}^T \bar{y} \geq 0$ 。

### 推导补充

Memoryless passivity 研究的是静态关系  $y = h(u)$ 。被动性的基本不等式是

$$u^T y \geq 0.$$

物理上， $u$  和  $y$  是功率共轭变量。例如电路里可以是电压和电流，机械系统里可以是力和速度。乘积  $u^T y$  表示瞬时功率。如果  $u^T y \geq 0$ ，说明元件不主动供能。

对标量函数  $y = h(u)$ ，passive 意味着

$$uh(u) \geq 0.$$

这要求  $u$  与  $h(u)$  同号或至少不反号。若  $h(u) = ku$ ，则

$$uh(u) = ku^2.$$

当  $k \geq 0$  时被动；当  $k < 0$  时主动。input strictly passive 通常要求

$$u^T y \geq \delta u^T u, \quad \delta > 0.$$

标量线性情形  $y = ku$  中，这变成

$$ku^2 \geq \delta u^2.$$

所以需要  $k \geq \delta > 0$ 。这表示输入端有严格耗散。output strictly passive 要求

$$u^T y \geq \epsilon y^T y.$$

对  $y = ku$ ，若  $k > 0$ ，则

$$ku^2 \geq \epsilon k^2 u^2.$$

当  $u \neq 0$  时除以  $ku^2 > 0$ ：

$$1 \geq \epsilon k.$$

所以可取任何  $0 < \epsilon \leq 1/k$ 。这说明输出严格性与输入严格性不是同一个常数，但对正斜率线性电阻都成立。

Sector 条件把非线性夹在两条直线之间。标量 sector  $[a, b]$  可写成

$$(h(u) - au)(h(u) - bu) \leq 0, \quad a < b.$$

为什么？若  $u > 0$ ，这等价于

$$au \leq h(u) \leq bu.$$

若  $u < 0$ ，不等式方向会随除以  $u$  变化，但乘积形式仍统一表达“图像位于两条射线之间”。把 sector 非线性变成 passive 的常用变换是减去下界斜率：

$$\tilde{y} = h(u) - au.$$

若  $h \in [a, b]$ ，则  $\tilde{y}$  与  $u$  同号：

$$u\tilde{y} = u(h(u) - au) \geq 0.$$

所以  $u \mapsto h(u) - au$  是 passive。若再考虑上界，也可得到有限增益或 output strict 性。本节学习检查：你应该能把 sector 乘积不等式展开，并能解释为什么减去 sector 下界能把非线性变成 passive 元件。

## 4.2 状态模型与储能函数

### 本节核心目标

本节把 passivity 推广到动态系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x, u), \quad (6.2-a)$$

其中输入和输出维数相同：

$$u, y \in \mathbb{R}^p.$$

动态系统有内部储能，因此不能要求每一瞬间  $u^T y \geq 0$ 。比如电容充电时，外部功率可能转化为储能，而不是立即耗散。正确条件是：输入功率至少覆盖储能增长率。

### storage function

storage function  $V(x)$  是系统内部储能的数学抽象。要求通常是

$$V(x) \geq 0.$$

若用它证明状态稳定，则还需要正定：

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0 \quad x \neq 0.$$

但定义 passivity 本身只要求正半定，因为某些系统可能有无法从端口观察或不计入的内部能量方向。

### Definition 6.3: 动态系统 passive

若存在连续可微正半定函数  $V(x)$ ，使

$$u^T y \geq \dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u), \quad \forall(x, u), \quad (6.2-b)$$

则系统 passive。如果

$$u^T y = \dot{V},$$

则 lossless。如果

$$u^T y \geq \dot{V} + u^T \varphi(u),$$

并且  $u^T \varphi(u) > 0$  对  $u \neq 0$ ，则 input strictly passive。如果

$$u^T y \geq \dot{V} + y^T \rho(y),$$

并且  $y^T \rho(y) > 0$  对  $y \neq 0$ ，则 output strictly passive。如果

$$u^T y \geq \dot{V} + \psi(x),$$

其中  $\psi(x)$  正定，则 strictly passive，也叫 state strictly passive。

### 微分不等式与积分能量不等式

从 (6.2-b) 出发，从 0 到  $T$  积分：

$$\int_0^T u^T(t)y(t)dt \geq \int_0^T \dot{V}(x(t))dt.$$

右边积分为

$$\int_0^T \dot{V}(x(t))dt = V(x(T)) - V(x(0)).$$

所以

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq \int_0^T u^T(t)y(t)dt. \quad (6.2-c)$$

这句话的物理意义是：系统储能增加量不超过外部输入的总能量。系统不能凭空增加能量。

### RLC 电路的逐项能量推导

主教材用 RLC 网络说明定义。状态取为：

- $x_1$ ：电感电流。
- $x_2$ ：电容电压。

储能函数为

$$V(x) = \frac{1}{2}Lx_1^2 + \frac{1}{2}Cx_2^2.$$

状态方程可写成

$$L\dot{x}_1 = u - h_2(x_1) - x_2,$$

$$C\dot{x}_2 = x_1 - h_3(x_2),$$

$$y = x_1 + h_1(u).$$

逐步求导：

$$\dot{V} = Lx_1\dot{x}_1 + Cx_2\dot{x}_2.$$

代入状态方程：

$$\dot{V} = x_1[u - h_2(x_1) - x_2] + x_2[x_1 - h_3(x_2)].$$

展开：

$$\dot{V} = x_1u - x_1h_2(x_1) - x_1x_2 + x_2x_1 - x_2h_3(x_2).$$

交叉项抵消：

$$-x_1x_2 + x_2x_1 = 0.$$

所以

$$\dot{V} = x_1u - x_1h_2(x_1) - x_2h_3(x_2).$$

由输出

$$y = x_1 + h_1(u),$$

输入功率为

$$uy = u[x_1 + h_1(u)] = ux_1 + uh_1(u).$$

因此

$$uy - \dot{V} = ux_1 + uh_1(u) - [x_1u - x_1h_2(x_1) - x_2h_3(x_2)].$$

抵消  $ux_1 - x_1u$ ：

$$uy - \dot{V} = uh_1(u) + x_1h_2(x_1) + x_2h_3(x_2).$$

即

$$uy = \dot{V} + uh_1(u) + x_1h_2(x_1) + x_2h_3(x_2). \quad (6.2-d)$$

若三个非线性电阻都 passive，则

$$uh_1(u) \geq 0, \quad x_1h_2(x_1) \geq 0, \quad x_2h_3(x_2) \geq 0.$$

于是

$$uy \geq \dot{V}.$$

系统 passive。若这些项对非零变量严格正，则得到 input strict、output strict 或 state strict passivity。

**Example 6.2: 积分器是 lossless**

系统：

$$\dot{x} = u, \quad y = x.$$

取

$$V = \frac{1}{2}x^2.$$

求导：

$$\dot{V} = x\dot{x}.$$

代入  $\dot{x} = u$ ：

$$\dot{V} = xu.$$

由于  $y = x$ ,

$$xu = yu = uy.$$

所以

$$\dot{V} = uy.$$

系统 lossless。积分器储存能量，但不耗散。

**积分器并联记忆无关函数**

若

$$\dot{x} = u, \quad y = x + h(u),$$

仍取

$$V = \frac{1}{2}x^2.$$

则

$$\dot{V} = xu.$$

输入功率：

$$uy = u[x + h(u)] = ux + uh(u).$$

因为  $ux = \dot{V}$ ：

$$uy = \dot{V} + uh(u).$$

若  $uh(u) \geq 0$ ，则系统 passive。若  $uh(u) > 0$  对  $u \neq 0$ ，则 input strictly passive。

**积分器反馈记忆无关函数**

系统：

$$\dot{x} = -h(x) + u, \quad y = x.$$

取

$$V = \frac{1}{2}x^2.$$

求导：

$$\dot{V} = x[-h(x) + u].$$

展开：

$$\dot{V} = -xh(x) + xu.$$

由于  $y = x$ ,

$$xu = yu, \quad xh(x) = yh(y).$$

所以

$$\dot{V} = yu - yh(y).$$

移项：

$$yu = \dot{V} + yh(y).$$

若  $yh(y) > 0$  对  $y \neq 0$ , 则 output strictly passive。**Example 6.3: 积分器串联 passive 非线性**

系统：

$$\dot{x} = u, \quad y = h(x).$$

取

$$V(x) = \int_0^x h(\sigma) d\sigma.$$

若  $h$  passive, 即  $xh(x) \geq 0$ , 则这个积分非负。求导：

$$\dot{V} = h(x)\dot{x}.$$

代入  $\dot{x} = u$ ：

$$\dot{V} = h(x)u = yu.$$

所以系统 lossless。若积分器换成一阶稳定环节：

$$a\dot{x} = -x + u, \quad y = h(x), \quad a > 0.$$

取

$$V(x) = a \int_0^x h(\sigma) d\sigma.$$

求导：

$$\dot{V} = ah(x)\dot{x}.$$

由系统方程

$$a\dot{x} = -x + u,$$

代入：

$$\dot{V} = h(x)(-x + u).$$

展开：

$$\dot{V} = -xh(x) + uh(x).$$

由于  $y = h(x)$ ：

$$\dot{V} = -xh(x) + uy.$$

移项：

$$uy = \dot{V} + xh(x).$$

若  $xh(x) \geq 0$ ，系统 passive；若  $xh(x) > 0$  对  $x \neq 0$ ，系统 strictly passive。

### 本节易错点

1. 动态系统 passive 不要求  $u^T y \geq 0$ ，而要求  $u^T y \geq \dot{V}$ 。
2. storage function 定义 passivity 时可正半定，但证明稳定时常需正定。
3. state strict、input strict、output strict 的耗散变量不同，后续稳定结论也不同。
4. 电路推导中交叉项抵消反映了电感和电容之间的能量交换，不是耗散。

### 推导补充

动态系统的 passivity 引入 storage function  $V(x)$ 。它相当于系统内部储能。被动性要求

$$\dot{V} \leq u^T y.$$

积分后：

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq \int_0^T u^T y dt.$$

整理为

$$V(x(T)) \leq V(x(0)) + \int_0^T u^T y dt.$$

含义是：最终储能不能超过初始储能加外界输入的总能量。系统不能凭空创造能量。如果还有耗散项，例如 output strictly passive：

$$\dot{V} \leq u^T y - \rho y^T y,$$

积分得到

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq \int_0^T u^T y dt - \rho \int_0^T y^T y dt.$$

也就是输入能量一部分进入储能，一部分被耗散。RLC 电路是最好的理解样板。若电感电流为  $i_L$ ，电容电压为  $v_C$ ，储能取

$$V = \frac{1}{2} L i_L^2 + \frac{1}{2} C v_C^2.$$

求导：

$$\dot{V} = L i_L \dot{i}_L + C v_C \dot{v}_C.$$

若电路方程给出

$$L \dot{i}_L = u - v_C - r_L(i_L),$$

$$C \dot{v}_C = i_L - r_C(v_C),$$

代入：

$$\dot{V} = i_L(u - v_C - r_L(i_L)) + v_C(i_L - r_C(v_C)).$$

展开：

$$\dot{V} = i_L u - i_L v_C - i_L r_L(i_L) + v_C i_L - v_C r_C(v_C).$$

交叉项抵消：

$$-i_L v_C + v_C i_L = 0.$$

剩下

$$\dot{V} = i_L u - i_L r_L(i_L) - v_C r_C(v_C).$$

若电阻特性满足

$$i_L r_L(i_L) \geq 0, \quad v_C r_C(v_C) \geq 0,$$

则

$$\dot{V} \leq i_L u.$$

若输出取  $y = i_L$ ，这就是

$$\dot{V} \leq u y.$$

这个推导中最重要的物理事实是：电感与电容之间的交叉项只是内部能量交换，最终抵消；真正耗散来自电阻项。反馈互联也能从储能看清。两个 passive 系统满足

$$\dot{V}_1 \leq u_1^T y_1, \quad \dot{V}_2 \leq u_2^T y_2.$$

总储能

$$V = V_1 + V_2$$

满足

$$\dot{V} \leq u_1^T y_1 + u_2^T y_2.$$

在负反馈中，内部互联项常相互抵消，所以整体仍 passive 或稳定。这为 6.5 节做准备。本节学习检查：你应该能从  $\dot{V} \leq u^T y$  积分得到能量不等式，并能在 RLC 推导中指出哪一项是输入功率、哪一项是耗散、哪一项是内部交换。

### 4.3 正实传递函数与 KYP 引理

#### 本节核心目标

本节把线性系统的 passivity 与传递函数的 positive real 条件联系起来。时域中，passivity 是

$$u^T y \geq \dot{V}.$$

频域中，对 SISO 系统，positive real 基本要求是

$$\operatorname{Re} G(j\omega) \geq 0.$$

这表示频率响应的相位不超过  $90^\circ$ ，因此两个 positive real 系统负反馈时，环路相位不会超过  $180^\circ$ 。这就是 passivity theorem 与经典频域稳定直觉的连接。

#### Definition 6.4: positive real

方阵传递函数  $G(s)$  positive real，若满足：

1. 所有元素的极点都在闭左半平面：

$$\operatorname{Re} s \leq 0.$$

2. 对所有不是极点的  $j\omega$ ，矩阵

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega)$$

半正定。对实系数系统， $G^T(-j\omega) = G^*(j\omega)$ ，所以这是 Hermitian 部分非负。

3. 若有纯虚轴极点，则必须是简单极点，且 residue matrix 半正定 Hermitian。

SISO 情形下，第 2 条就是

$$2 \operatorname{Re} G(j\omega) \geq 0,$$

即

$$\operatorname{Re} G(j\omega) \geq 0.$$

**strictly positive real**

$G(s)$  strictly positive real, 若存在  $\epsilon > 0$ , 使

$$G(s - \epsilon)$$

positive real。直觉是：把频域判据向右留出一点稳定裕度。SISO 中通常表现为 Nyquist 曲线严格落在右半平面，并且系统极点严格在左半平面。

**为什么 relative degree 受限**

若 SISO 严格 proper 且相对阶大于 1，频率  $\omega \rightarrow \infty$  时相位会趋近  $-180^\circ$  或更低，实部可能不保持非负。因此 positive real 传递函数的相对阶通常只能是 0 或 1。这就是 passivity 对高频相位的限制。

**Example 6.4:**  $G(s) = 1/s$

$$G(s) = \frac{1}{s}.$$

它在原点有一个简单极点，residue 为 1，非负。对  $s = j\omega$ ：

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}.$$

实部为

$$\operatorname{Re} G(j\omega) = 0.$$

所以它 positive real。但它不是 strictly positive real，因为它有虚轴极点，不能提供严格稳定裕度。

**Example:**  $G(s) = 1/(s + a)$

若

$$G(s) = \frac{1}{s + a}, \quad a > 0,$$

则

$$G(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}.$$

分子分母乘共轭：

$$G(j\omega) = \frac{a - j\omega}{(a + j\omega)(a - j\omega)}.$$

分母为

$$(a + j\omega)(a - j\omega) = a^2 + \omega^2.$$

所以

$$G(j\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

实部：

$$\operatorname{Re} G(j\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2} > 0.$$

且极点  $-a$  在左半平面，因此它 strictly positive real。

### Positive Real Lemma / KYP Lemma

对最小实现

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D,$$

positive real 等价于存在矩阵  $P = P^T > 0$ 、 $L$ 、 $W$ ，使

$$A^T P + PA = -L^T L, \quad (6.3-a)$$

$$PB = C^T - L^T W, \quad (6.3-b)$$

$$D + D^T = W^T W. \quad (6.3-c)$$

strictly positive real 时，可以得到更强版本，例如存在  $\epsilon > 0$ ，使

$$A^T P + PA = -L^T L - \epsilon P. \quad (6.3-d)$$

这个结果又叫 KYP lemma，是频域不等式与状态空间二次 storage function 之间的桥。

### 由 KYP 推出 passivity 的完整配方

线性系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du.$$

取 storage function

$$V = \frac{1}{2}x^T Px.$$

先求导：

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{x}^T Px + \frac{1}{2}x^T P\dot{x}.$$

由于  $P = P^T$ ，两个标量项相等，因此

$$\dot{V} = x^T P\dot{x}.$$

代入  $\dot{x} = Ax + Bu$ ：

$$\dot{V} = x^T PAx + x^T PBu. \quad (6.3-e)$$

输入功率：

$$u^T y = u^T (Cx + Du) = u^T Cx + u^T Du. \quad (6.3-f)$$

对第一项  $x^T PAx$ ，因为它是标量，

$$x^T P A x = \frac{1}{2} x^T (P A + A^T P) x.$$

由 (6.3-a):

$$x^T P A x = -\frac{1}{2} x^T L^T L x = -\frac{1}{2} \|Lx\|^2.$$

由 (6.3-b):

$$P B = C^T - L^T W.$$

所以

$$x^T P B u = x^T (C^T - L^T W) u.$$

展开:

$$x^T P B u = x^T C^T u - x^T L^T W u.$$

由于  $x^T C^T u = u^T C x$ , 得到

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \|Lx\|^2 + u^T C x - x^T L^T W u. \quad (6.3-g)$$

再处理  $u^T D u$ 。因为  $u^T D u$  是标量,

$$u^T D u = \frac{1}{2} u^T (D + D^T) u.$$

由 (6.3-c):

$$u^T D u = \frac{1}{2} u^T W^T W u = \frac{1}{2} \|Wu\|^2.$$

所以

$$u^T y = u^T C x + \frac{1}{2} \|Wu\|^2. \quad (6.3-h)$$

用 (6.3-h) 减去 (6.3-g):

$$u^T y - \dot{V} = \left[ u^T C x + \frac{1}{2} \|Wu\|^2 \right] - \left[ -\frac{1}{2} \|Lx\|^2 + u^T C x - x^T L^T W u \right].$$

逐项抵消  $u^T C x$ :

$$u^T y - \dot{V} = \frac{1}{2} \|Wu\|^2 + \frac{1}{2} \|Lx\|^2 + x^T L^T W u.$$

注意

$$x^T L^T W u = (Lx)^T (Wu).$$

所以

$$u^T y - \dot{V} = \frac{1}{2} \|Lx\|^2 + (Lx)^T (Wu) + \frac{1}{2} \|Wu\|^2.$$

这是平方展开：

$$\frac{1}{2}\|Lx + Wu\|^2 = \frac{1}{2}\|Lx\|^2 + (Lx)^T(Wu) + \frac{1}{2}\|Wu\|^2.$$

因此

$$u^T y - \dot{V} = \frac{1}{2}\|Lx + Wu\|^2 \geq 0.$$

即

$$u^T y \geq \dot{V}.$$

系统 passive。若严格正实给出 (6.3-d)，同样推导会多出

$$\frac{\epsilon}{2}x^T Px$$

于是

$$u^T y - \dot{V} = \frac{1}{2}\|Lx + Wu\|^2 + \frac{\epsilon}{2}x^T Px.$$

若  $P > 0$ ，第二项对  $x \neq 0$  正，因此系统 strictly passive。

### 本节易错点

1. Positive real 是频域条件，passivity 是时域能量条件，KYP lemma 连接二者。
2. 最小实现很重要；不可控不可观隐藏模态可能破坏状态空间结论。
3. 严格正实对应严格被动，通常能带来渐近稳定结论。
4. 推导中的关键是把  $u^T y - \dot{V}$  配成  $\frac{1}{2}\|Lx + Wu\|^2$ 。

### 推导补充

Positive real 是线性系统频域里的 passivity。SISO 传递函数  $G(s)$  positive real 的核心要求是：在右半平面解析，并且在频率轴上

$$\operatorname{Re} G(j\omega) \geq 0.$$

如果输入输出是实信号，平均功率与频域表达有关。对 LTI 系统  $Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$ ，输入输出内积为

$$\int_0^\infty u(t)y(t)dt$$

在频域中对应  $U^*(j\omega)G(j\omega)U(j\omega)$  的实部。若  $G(j\omega)$  的 Hermitian 部分非负，就不会产生负能量。

KYP 引理把频域正实性转为状态空间矩阵不等式。设

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du.$$

选二次 storage

$$V = \frac{1}{2}x^T Px, \quad P = P^T > 0.$$

则

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{x}^T P x + \frac{1}{2}x^T P \dot{x}.$$

因为  $P = P^T$ ，这等于

$$\dot{V} = x^T P \dot{x}.$$

代入  $\dot{x} = Ax + Bu$ ：

$$\dot{V} = x^T P A x + x^T P B u.$$

输出供给率为

$$u^T y = u^T (Cx + Du) = u^T C x + u^T D u.$$

要证明 passivity，需要

$$\dot{V} \leq u^T y.$$

也就是

$$0 \leq u^T y - \dot{V} = u^T C x + u^T D u - x^T P A x - x^T P B u.$$

把右边写成关于  $x, u$  的二次型。由于标量可转置，

$$x^T P A x = \frac{1}{2}x^T (A^T P + P A)x.$$

且

$$x^T P B u = u^T B^T P x.$$

所以

$$u^T y - \dot{V} = -\frac{1}{2}x^T (A^T P + P A)x + u^T (C - B^T P)x + u^T D u.$$

KYP 条件本质上就是要求这个二次型非负。常见等式形式引入矩阵  $L, W$ ，使

$$A^T P + P A = -L^T L,$$

$$P B = C^T - L^T W,$$

$$D + D^T = W^T W.$$

代入后， $u^T y - \dot{V}$  可以整理成平方项

$$\frac{1}{2}\|Lx + Wu\|^2 \geq 0.$$

这就直接给出 passivity。Relative degree 为什么受限？严格 proper 且相对阶大于 1 的传递函数在高频时相位接近  $-180^\circ$  或更低，实部会变负，无法保持 positive real。被动系统不能有“过多积分/微分滞后”导致输入输出功率相位偏离超过  $90^\circ$ 。

本节学习检查：你应该能从  $V = \frac{1}{2}x^T P x$  推导  $u^T y - \dot{V}$ ，并能理解 KYP 引理是把这个差值写成平方和。

## 4.4 $\mathcal{L}_2$ 稳定性与 Lyapunov 稳定性

### 本节核心目标

本节说明 passivity 为什么强：

1. output strictly passive  $\Rightarrow$  finite-gain  $\mathcal{L}_2$  stable。
2. passive + 正定 storage  $\Rightarrow$  Lyapunov 稳定。
3. strict passivity 或 output strict + zero-state observability  $\Rightarrow$  渐近稳定。

### Lemma 6.5: output strictly passive 推出 $\mathcal{L}_2$ 增益

若存在 storage function  $V \geq 0$ , 使

$$u^T y \geq \dot{V} + \delta y^T y, \quad \delta > 0, \quad (6.4-a)$$

则系统 finite-gain  $\mathcal{L}_2$  stable, 增益不超过

$$\frac{1}{\delta}.$$

### Young 不等式逐步推导

对任意向量  $u, y$ , 有

$$0 \leq \left\| \frac{1}{\sqrt{\delta}} u - \sqrt{\delta} y \right\|^2.$$

展开：

$$0 \leq \frac{1}{\delta} u^T u - 2u^T y + \delta y^T y.$$

移项：

$$2u^T y \leq \frac{1}{\delta} u^T u + \delta y^T y.$$

两边除以 2：

$$u^T y \leq \frac{1}{2\delta} u^T u + \frac{\delta}{2} y^T y. \quad (6.4-b)$$

由 output strict passivity (6.4-a)：

$$\dot{V} + \delta y^T y \leq u^T y.$$

再用 (6.4-b)：

$$\dot{V} + \delta y^T y \leq \frac{1}{2\delta} u^T u + \frac{\delta}{2} y^T y.$$

两边减去  $\delta y^T y$ ：

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2\delta} u^T u - \frac{\delta}{2} y^T y. \quad (6.4-c)$$

从 0 到  $T$  积分：

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq \frac{1}{2\delta} \int_0^T u^T u dt - \frac{\delta}{2} \int_0^T y^T y dt.$$

整理：

$$\frac{\delta}{2} \int_0^T y^T y dt \leq \frac{1}{2\delta} \int_0^T u^T u dt + V(x(0)) - V(x(T)).$$

因为  $V(x(T)) \geq 0$ ：

$$\frac{\delta}{2} \|y_T\|_2^2 \leq \frac{1}{2\delta} \|u_T\|_2^2 + V(x(0)).$$

两边乘以  $2/\delta$ ：

$$\|y_T\|_2^2 \leq \frac{1}{\delta^2} \|u_T\|_2^2 + \frac{2}{\delta} V(x(0)).$$

取平方根：

$$\|y_T\|_2 \leq \frac{1}{\delta} \|u_T\|_2 + \sqrt{\frac{2V(x(0))}{\delta}}.$$

因此  $\mathcal{L}_2$  增益不超过  $1/\delta$ 。

#### Lemma 6.6: passive 推出 Lyapunov 稳定

若系统 passive，且 storage function  $V(x)$  正定。无输入时

$$u = 0.$$

passivity 给

$$0 = u^T y \geq \dot{V}.$$

所以

$$\dot{V} \leq 0.$$

由于  $V$  正定，按 Lyapunov 稳定定理，原点稳定。注意：这只给稳定，不给渐近稳定。因为  $\dot{V} \leq 0$  可能在很大集合上为零。

#### zero-state observability

系统 zero-state observable，若无输入时

$$y(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) \equiv 0.$$

它表示输出不会隐藏内部非零运动。在线性系统中，这类似可观测性；在非线性系统中，它是针对零输入和零输出轨线的性质。

**Lemma 6.7: passivity 推出渐近稳定**

如果系统 strictly passive, 则无输入时

$$0 = u^T y \geq \dot{V} + \psi(x).$$

因此

$$\dot{V} \leq -\psi(x).$$

若  $\psi$  正定, 则  $\dot{V}$  负定, 原点渐近稳定。如果系统 output strictly passive, 则无输入时

$$0 = u^T y \geq \dot{V} + y^T \rho(y).$$

所以

$$\dot{V} \leq -y^T \rho(y) \leq 0.$$

此时  $\dot{V} = 0$  只说明

$$y = 0.$$

若系统 zero-state observable, 则在  $y = 0$  中能保持不变的轨线只有  $x = 0$ 。由 LaSalle 不变性原理, 原点渐近稳定。

若  $V$  径向无界, 则这些结论可推广为全局。

**Example 6.6: 非线性弹簧阻尼系统**

系统:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -ax_1^3 - kx_2 + u,$$

$$y = x_2.$$

取 storage function

$$V = \frac{a}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

逐步求导:

$$\dot{V} = ax_1^3 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2.$$

代入系统:

$$\dot{V} = ax_1^3 x_2 + x_2(-ax_1^3 - kx_2 + u).$$

展开:

$$\dot{V} = ax_1^3 x_2 - ax_1^3 x_2 - kx_2^2 + x_2 u.$$

抵消：

$$\dot{V} = -kx_2^2 + x_2u.$$

由于  $y = x_2$ ：

$$\dot{V} = -ky^2 + yu.$$

移项：

$$yu = \dot{V} + ky^2.$$

所以系统 output strictly passive,  $\delta = k$ 。由 Lemma 6.5,  $\mathcal{L}_2$  增益不超过

$$\frac{1}{k}.$$

无输入时  $u = 0$ ：

$$\dot{V} = -kx_2^2.$$

这不是负定，因为当  $x_2 = 0$  时  $\dot{V} = 0$ 。但若  $y = x_2 \equiv 0$ ，则  $x_2 \equiv 0$ ，进而

$$\dot{x}_2 = -ax_1^3 = 0.$$

所以

$$x_1 = 0.$$

因此系统 zero-state observable, 原点渐近稳定。

### 本节易错点

1. Passive + 正定 storage 只给稳定。
2. Output strict passivity 给  $\mathcal{L}_2$  增益，但状态收敛还需要 zero-state observability。
3. Strict passivity 是状态耗散，通常比 output strict 更直接推出渐近稳定。
4.  $\mathcal{L}_2$  增益界中的  $1/\delta$  来自 Young 不等式。

### 推导补充

Passivity 可以推出  $\mathcal{L}_2$  增益，也可以推出 Lyapunov 稳定。关键看是否有严格耗散。若系统 output strictly passive：

$$\dot{V} \leq u^T y - \rho y^T y, \quad \rho > 0.$$

用 Young 不等式处理输入输出功率项。对任意  $\epsilon > 0$ ,

$$u^T y \leq \|u\| \|y\|.$$

再用

$$ab \leq \frac{1}{2\epsilon} a^2 + \frac{\epsilon}{2} b^2.$$

令  $a = \|u\|$ ,  $b = \|y\|$ , 得到

$$u^T y \leq \frac{1}{2\epsilon} \|u\|^2 + \frac{\epsilon}{2} \|y\|^2.$$

代回：

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2\epsilon} \|u\|^2 + \frac{\epsilon}{2} \|y\|^2 - h_0 \|y\|^2.$$

合并输出项：

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2\epsilon} \|u\|^2 - \left(\rho - \frac{\epsilon}{2}\right) \|y\|^2.$$

为了保留负输出项，选  $0 < \epsilon < 2\rho$ 。一个方便选择是  $\epsilon = \rho$ ，则

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2\rho} \|u\|^2 - \frac{\rho}{2} \|y\|^2.$$

积分：

$$V(T) - V(0) \leq \frac{1}{2\rho} \int_0^T \|u\|^2 dt - \frac{\rho}{2} \int_0^T \|y\|^2 dt.$$

移项：

$$\frac{\rho}{2} \|y_T\|_2^2 \leq \frac{1}{2\rho} \|u_T\|_2^2 + V(0) - V(T).$$

若零初始且  $V(T) \geq 0$ ，得到

$$\|y_T\|_2^2 \leq \frac{1}{\rho^2} \|u_T\|_2^2.$$

所以

$$\|y_T\|_2 \leq \frac{1}{\rho} \|u_T\|_2.$$

这说明 output strict passivity 给出有限  $\mathcal{L}_2$  增益。当  $u = 0$  时，passivity 给出

$$\dot{V} \leq 0.$$

如果  $V$  正定，就有 Lyapunov 稳定。若还要渐近稳定，需要更多条件，例如 zero-state observability。原因是  $\dot{V} \leq -\rho y^T y$  只保证输出趋于零，不直接保证状态趋于零。若系统在零输入下  $y(t) \equiv 0$  只能由零状态产生，则输出趋零才能推出状态趋零。本节学习检查：你应该能用 Young 不等式从 output strict passivity 推出  $\mathcal{L}_2$  增益  $1/\rho$ ，并能解释为什么 passivity 本身通常只给稳定，不自动给渐近稳定。

## 4.5 无源反馈定理

### 本节核心目标

本节研究 passive 系统的反馈互联。与小增益定理不同，passivity theorem 不看增益乘积，而看功率和能量。核心机制是：两个系统的 storage functions 可以相加，反馈中的内部功率项会抵消。

**反馈结构**

两个系统  $H_1, H_2$  满足

$$e_1^T y_1 \geq \dot{V}_1,$$

$$e_2^T y_2 \geq \dot{V}_2.$$

反馈关系取为

$$e_1 = u_1 - y_2, \quad e_2 = u_2 + y_1.$$

这里  $u_1, u_2$  是外部输入,  $e_1, e_2$  是进入两个子系统的端口输入。

**Theorem 6.1: 两个 passive 系统反馈仍 passive**

把两个 passivity 不等式相加:

$$e_1^T y_1 + e_2^T y_2 \geq \dot{V}_1 + \dot{V}_2.$$

令

$$V = V_1 + V_2.$$

则

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2.$$

现在计算左边。代入反馈关系:

$$e_1^T y_1 = (u_1 - y_2)^T y_1 = u_1^T y_1 - y_2^T y_1.$$

以及

$$e_2^T y_2 = (u_2 + y_1)^T y_2 = u_2^T y_2 + y_1^T y_2.$$

相加:

$$e_1^T y_1 + e_2^T y_2 = u_1^T y_1 + u_2^T y_2 - y_2^T y_1 + y_1^T y_2.$$

因为  $y_2^T y_1$  和  $y_1^T y_2$  都是同一个标量,

$$y_2^T y_1 = y_1^T y_2.$$

所以内部功率项抵消:

$$-y_2^T y_1 + y_1^T y_2 = 0.$$

得到

$$e_1^T y_1 + e_2^T y_2 = u_1^T y_1 + u_2^T y_2.$$

于是

$$u_1^T y_1 + u_2^T y_2 \geq \dot{V}.$$

这说明闭环从外部端口  $(u_1, u_2)$  到输出  $(y_1, y_2)$  是 passive。

**Lemma 6.8: 两个 output strictly passive 系统反馈**

若

$$e_i^T y_i \geq \dot{V}_i + \delta_i y_i^T y_i, \quad i = 1, 2,$$

相加得

$$e_1^T y_1 + e_2^T y_2 \geq \dot{V} + \delta_1 \|y_1\|^2 + \delta_2 \|y_2\|^2.$$

令

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

则

$$\delta_1 \|y_1\|^2 + \delta_2 \|y_2\|^2 \geq \delta (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2).$$

所以闭环 output strictly passive。由 Lemma 6.5，闭环 finite-gain  $\mathcal{L}_2$  stable，增益不超过  $1/\delta$ 。

**Theorem 6.2: shortage/excess passivity 补偿**

更一般地，假设每个系统满足

$$e_i^T y_i \geq \dot{V}_i + c_i e_i^T e_i + \delta_i y_i^T y_i. \quad (6.5-a)$$

这里：

- $c_i > 0$ : 输入端有 excess passivity。
- $c_i < 0$ : 输入端有 shortage passivity。
- $\delta_i > 0$ : 输出端有 excess passivity。
- $\delta_i < 0$ : 输出端有 shortage passivity。

先看无外部输入情形  $u_1 = u_2 = 0$ 。则

$$e_1 = -y_2, \quad e_2 = y_1.$$

代入耗散项：

$$c_1 e_1^T e_1 = c_1 y_2^T y_2,$$

$$c_2 e_2^T e_2 = c_2 y_1^T y_1.$$

总耗散中  $y_1$  的系数是

$$c_2 + \delta_1,$$

总耗散中  $y_2$  的系数是

$$c_1 + \delta_2.$$

若

$$c_1 + \delta_2 > 0, \quad c_2 + \delta_1 > 0,$$

则总耗散为正。直觉是：一个系统输入端缺少的被动性，可以由另一个系统输出端多出来的被动性补偿。

### Theorem 6.3: 反馈闭环的渐近稳定

无外部输入时，取

$$V = V_1 + V_2.$$

若两个系统 strictly passive，则

$$\dot{V} \leq -\psi_1(x_1) - \psi_2(x_2).$$

右边对  $(x_1, x_2) \neq 0$  负定，所以原点渐近稳定。若两个系统 output strictly passive，则

$$\dot{V} \leq -y_1^T \rho_1(y_1) - y_2^T \rho_2(y_2).$$

这只是半负定。令  $\dot{V} = 0$ ，得到

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0.$$

若两个系统 zero-state observable，则在反馈关系下， $y_1 \equiv 0, y_2 \equiv 0$  只能对应

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 \equiv 0.$$

因此最大不变集只有原点，由 LaSalle 原理得到渐近稳定。

### Example 6.10 的意义：定理条件充分但不必要

有些闭环无法直接满足 Theorem 6.3 的 strict/output strict 条件，但直接对

$$V = V_1 + V_2$$

求导仍可能得到

$$\dot{V} \leq 0$$

并且最大不变集只有原点。这说明 passivity theorem 是强大的模块化工具，但不是唯一证明方法。若定理套不上，仍可回到 Lyapunov/LaSalle 直接分析闭环。

### Theorem 6.4: 动态系统 + 时变 memoryless passive 非线性

当一个组件是动态系统，另一个是可能时变的 memoryless passive nonlinearity，闭环一般是非自治系统。此时不能直接使用自治 LaSalle。若动态系统 strictly passive，取其 storage function  $V_1(x_1)$  作为 Lyapunov 函数。闭环中 memoryless 元件 passive，因此不会增加能量；动态系统 strict passivity 提供状态耗散：

$$\dot{V}_1 \leq -\psi(x_1).$$

由非自治 Lyapunov 定理可得一致渐近稳定。若  $V_1$  径向无界，则得到全局一致渐近稳定。

### Theorem 6.5: 动态系统 + 时不变 memoryless 非线性

若 memoryless 非线性时不变，可以使用 LaSalle。假设动态系统 zero-state observable, 且

$$u^T y \geq \dot{V} + y^T \rho_1(y)$$

与 memoryless 非线性的 passivity 余量  $\rho_2$  满足

$$y^T [ho_1(y) + \rho_2(y)] > 0, \quad y \neq 0.$$

则闭环  $\dot{V} \leq 0$ , 且  $\dot{V} = 0$  推出  $y = 0$ 。再由 zero-state observability, 最大不变集只有原点, 所以渐近稳定。

### Loop transformation: 为什么 sector 非线性也能用 passivity

若反馈中的 memoryless 非线性属于 sector  $[K_1, K_2]$ , 它不一定直接 passive。第 6.1 节已说明可以通过输入前馈和输出反馈把它变成 passive 非线性。在反馈环中, 对非线性分支做的变换必须由动态分支上的相反变换抵消, 这样闭环本质不变。步骤直觉是:

1. 对非线性输出减去  $K_1 u$ , 把 sector 下界移到 0。
2. 用输出反馈处理上界  $K_2 - K_1$ 。
3. 对另一个反馈组件做等价补偿, 保持闭环输入输出关系不变。
4. 在变换后的坐标中应用 passivity theorem。

动态 multiplier 也是同样思想: 在一个分支乘以  $W(s)$ , 另一个分支乘以  $W^{-1}(s)$ 。变换后的系统可能更容易证明 positive real 或 passive。

### 本节易错点

1. Passive feedback passive 是端口性质, 不自动保证内部状态收敛。
2. 渐近稳定需要 strict passivity 或 observability 条件。
3. shortage/excess passivity 是可以互相补偿的。
4. loop transformation 改变分析坐标, 不改变原闭环的实质。

### 推导补充

Passivity theorem 的核心是反馈互联中的功率抵消。设两个系统分别满足

$$\dot{V}_1 \leq u_1^T y_1,$$

$$\dot{V}_2 \leq u_2^T y_2.$$

负反馈互联常写成

$$u_1 = r_1 - y_2, \quad u_2 = r_2 + y_1.$$

总储能

$$V = V_1 + V_2$$

满足

$$\dot{V} \leq u_1^T y_1 + u_2^T y_2.$$

代入互联：

$$\dot{V} \leq (r_1 - y_2)^T y_1 + (r_2 + y_1)^T y_2.$$

展开：

$$\dot{V} \leq r_1^T y_1 - y_2^T y_1 + r_2^T y_2 + y_1^T y_2.$$

由于标量内积满足

$$y_2^T y_1 = y_1^T y_2,$$

交叉项抵消：

$$-y_2^T y_1 + y_1^T y_2 = 0.$$

所以

$$\dot{V} \leq r_1^T y_1 + r_2^T y_2.$$

这说明闭环从外部输入  $(r_1, r_2)$  到输出  $(y_1, y_2)$  仍是 passive。若  $r_1 = r_2 = 0$ ，则

$$\dot{V} \leq 0.$$

闭环稳定性由总储能保证。若两个系统 output strictly passive：

$$\dot{V}_1 \leq u_1^T y_1 - h_{o1} y_1^T y_1,$$

$$\dot{V}_2 \leq u_2^T y_2 - h_{o2} y_2^T y_2,$$

相加并代入负反馈，内部功率仍抵消，得到

$$\dot{V} \leq r_1^T y_1 + r_2^T y_2 - h_{o1} \|y_1\|^2 - h_{o2} \|y_2\|^2.$$

零外部输入时

$$\dot{V} \leq -h_{o1} \|y_1\|^2 - h_{o2} \|y_2\|^2.$$

若再有适当可观测性，输出能量耗散可推出状态收敛。Shortage/excess passivity 的补偿也可以用同样代数看。若一个系统缺少输入被动性，表现为

$$\dot{V}_1 \leq u_1^T y_1 + \nu_1 u_1^T u_1$$

其中  $\nu_1 > 0$  是 shortage；另一个系统有输出严格性

$$\dot{V}_2 \leq u_2^T y_2 - h o_2 y_2^T y_2.$$

在反馈中, 某些  $u_1$  与  $y_2$  成为同一内部信号, 因此只要  $\rho_2$  大到能覆盖  $\nu_1$ , 总耗散仍为负。这就是补偿条件的直觉。本节学习检查: 你应该能把负反馈代入  $u_1^T y_1 + u_2^T y_2$  并亲手看见交叉功率项抵消。

## 4.6 本章习题与训练

### 本节核心目标

第 6 章习题训练如下能力:

1. 把 sector 非线性变换为 passive 非线性。
2. 给动态系统构造 storage function。
3. 判断传递函数是否 positive real 或 strictly positive real。
4. 用 KYP lemma 建立 passivity。
5. 用 passivity theorem 分析机器人、刚体、反馈系统。
6. 理解 dissipativity 是 passivity 的推广。

### 代表题 1: sector $[K_1, K_2]$ 到 passive 的变换

已知

$$[h(u) - K_1 u]^T [h(u) - K_2 u] \leq 0.$$

令

$$\tilde{y} = h(u) - K_1 u, \quad K = K_2 - K_1 > 0.$$

则

$$h(u) - K_2 u = \tilde{y} - K u.$$

代入 sector 不等式:

$$\tilde{y}^T (\tilde{y} - K u) \leq 0.$$

两边乘以  $-1$ :

$$\tilde{y}^T (K u - \tilde{y}) \geq 0.$$

定义

$$\bar{y} = \tilde{y}, \quad \bar{u} = K u - \tilde{y}.$$

则

$$\bar{y}^T \bar{u} = \tilde{y}^T (K u - \tilde{y}) \geq 0.$$

所以变换后的函数 passive。

**代表题 2：并联系统保持 passive**

两个系统并联，输入相同  $u$ ，输出相加：

$$y = y_1 + y_2.$$

若

$$u^T y_1 \geq \dot{V}_1, \quad u^T y_2 \geq \dot{V}_2,$$

则

$$u^T y = u^T (y_1 + y_2) = u^T y_1 + u^T y_2.$$

代入 passivity 不等式：

$$u^T y \geq \dot{V}_1 + \dot{V}_2.$$

令

$$V = V_1 + V_2.$$

则

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2.$$

因此

$$u^T y \geq \dot{V}.$$

并联系统 passive。若两个系统分别 input strictly passive：

$$u^T y_i \geq \dot{V}_i + u^T \varphi_i(u),$$

相加得到

$$u^T y \geq \dot{V} + u^T [\varphi_1(u) + \varphi_2(u)].$$

若

$$u^T [\varphi_1(u) + \varphi_2(u)] > 0, \quad u \neq 0,$$

并联系统 input strictly passive。

**代表题 3：二阶传递函数 strictly positive real 判别**

考虑

$$G(s) = \frac{b_0 s + b_1}{s^2 + a_1 s + a_2}.$$

严格正实要求极点在左半平面，因此二阶 Hurwitz 条件为

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0.$$

还需要高频和频域实部条件。令  $s = j\omega$ ：

$$G(j\omega) = \frac{b_1 + jb_0\omega}{a_2 - \omega^2 + ja_1\omega}.$$

乘以分母共轭：

$$G(j\omega) = \frac{(b_1 + jb_0\omega)(a_2 - \omega^2 - ja_1\omega)}{(a_2 - \omega^2)^2 + a_1^2\omega^2}.$$

只看实部的分子。展开：

$$(b_1)(a_2 - \omega^2) + (jb_0\omega)(-ja_1\omega).$$

因为  $j(-j) = 1$ ，第二项实部为

$$b_0a_1\omega^2.$$

所以实部分子为

$$b_1a_2 - b_1\omega^2 + b_0a_1\omega^2 = b_1a_2 + (b_0a_1 - b_1)\omega^2.$$

要对所有  $\omega$  为正，需要

$$b_1a_2 > 0, \quad b_0a_1 - b_1 > 0.$$

结合正系数条件，得到

$$a_1, a_2, b_0, b_1 > 0, \quad b_1 < a_1b_0.$$

这就是该题的核心判别。

#### 代表题 4：机器人系统 passivity

机器人动力学常写作

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau.$$

令输入为关节力矩

$$u = \tau,$$

输出为关节速度

$$y = \dot{q}.$$

取总能量

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + P(q),$$

其中  $P(q)$  是势能，满足

$$\frac{\partial P}{\partial q} = g^T(q).$$

求导：

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q}.$$

用动力学方程：

$$M(q) \ddot{q} = \tau - C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q).$$

代入：

$$\dot{q}^T M \ddot{q} = \dot{q}^T \tau - \dot{q}^T C \dot{q} - \dot{q}^T g(q).$$

势能项为

$$\frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} = g^T(q) \dot{q} = \dot{q}^T g(q).$$

与  $-\dot{q}^T g(q)$  抵消。于是

$$\dot{V} = \dot{q}^T \tau + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} - \dot{q}^T C \dot{q}.$$

合并后两项：

$$\frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} - \dot{q}^T C \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T (\dot{M} - 2C) \dot{q}.$$

机器人动力学有性质：

$$\dot{M} - 2C$$

是反对称矩阵。对任意向量  $v$ ，若  $S^T = -S$ ，则

$$v^T S v = 0.$$

所以

$$\frac{1}{2} \dot{q}^T (\dot{M} - 2C) \dot{q} = 0.$$

得到

$$\dot{V} = \dot{q}^T \tau = \tau^T y.$$

因此从  $\tau$  到  $\dot{q}$  的映射 lossless/passive。若加入阻尼控制

$$\tau = -K_d \dot{q} + v,$$

则

$$\dot{V} = \dot{q}^T (-K_d \dot{q} + v) = v^T \dot{q} - \dot{q}^T K_d \dot{q}.$$

也就是

$$v^T y = \dot{V} + y^T K_d y.$$

若  $K_d > 0$ ，系统 output strictly passive。

**代表题 5：刚体欧拉方程 lossless**

刚体角速度  $\omega$ ，转动惯量矩阵  $J = J^T > 0$ ，输入力矩  $u$ 。能量取

$$V = \frac{1}{2} \omega^T J \omega.$$

欧拉方程可写成

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega = u.$$

求导：

$$\dot{V} = \omega^T J \dot{\omega}.$$

由方程：

$$J\dot{\omega} = u - \omega \times J\omega.$$

代入：

$$\dot{V} = \omega^T u - \omega^T (\omega \times J\omega).$$

叉乘项满足  $a^T(a \times b) = 0$ ，因为  $a \times b$  垂直于  $a$ 。所以

$$\omega^T (\omega \times J\omega) = 0.$$

因此

$$\dot{V} = \omega^T u = u^T \omega.$$

从力矩输入到角速度输出是 lossless。

**推导补充**

第 6 章习题训练的是把 passivity、positive real、sector、机械能统一起来。题型一：sector 到 passivity。若非线性  $\phi(y)$  在 sector  $[K_1, K_2]$ ，常见变换是

$$\tilde{\phi}(y) = \phi(y) - K_1 y.$$

然后检查

$$y^T \tilde{\phi}(y) = y^T \phi(y) - y^T K_1 y \geq 0.$$

若还要利用上界，则考虑

$$(K_2 y - \phi(y))^T (\phi(y) - K_1 y) \geq 0.$$

这类题本质是代数变形，不要凭图像跳步。题型二：并联系统。若两个系统分别 passive：

$$\dot{V}_i \leq u^T y_i, \quad i = 1, 2,$$

并联输出

$$y = y_1 + y_2.$$

取总储能

$$V = V_1 + V_2.$$

则

$$\dot{V} \leq u^T y_1 + u^T y_2 = u^T (y_1 + y_2) = u^T y.$$

所以并联保持 passive。题型三：二阶传递函数 SPR。对

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

先检查 Hurwitz:

$$a_1 > 0, \quad a_0 > 0.$$

再计算

$$G(j\omega) + G^*(-j\omega) = 2 \operatorname{Re} G(j\omega).$$

把  $s = j\omega$  代入，分母为

$$(j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0 = a_0 - \omega^2 + j a_1 \omega.$$

实部需要通过乘以共轭分母求出。分母模平方为

$$(a_0 - \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2 > 0.$$

所以正实性取决于分子实部是否非负。做题时要完整展开，不要只看系数正。题型四：机器人 passivity。机械系统通常有

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau.$$

取能量

$$V = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + P(q),$$

其中  $\nabla P(q) = g(q)$ 。求导:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \dot{q}^T g(q).$$

由动力学

$$M\ddot{q} = \tau - C\dot{q} - g.$$

代入:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T (\tau - C\dot{q} - g) + \dot{q}^T g.$$

势能项抵消：

$$-\dot{q}^T g + \dot{q}^T g = 0.$$

得到

$$\dot{V} = \dot{q}^T \tau + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} - \dot{q}^T C \dot{q}.$$

机器人动力学有性质  $\dot{M} - 2C$  反对称，因此

$$\dot{q}^T (\dot{M} - 2C) \dot{q} = 0.$$

也就是

$$\frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} - \dot{q}^T C \dot{q} = 0.$$

所以

$$\dot{V} = \dot{q}^T \tau.$$

输入  $\tau$ 、输出  $\dot{q}$  下系统 lossless passive。题型五：刚体欧拉方程。若

$$J\dot{\omega} = -\omega \times J\omega + \tau,$$

取

$$V = \frac{1}{2} \omega^T J \omega.$$

则

$$\dot{V} = \omega^T J \dot{\omega} = \omega^T (-\omega \times J\omega + \tau).$$

叉乘项满足  $a^T (a \times b) = 0$ ，所以

$$\omega^T (\omega \times J\omega) = 0.$$

因此

$$\dot{V} = \omega^T \tau.$$

输入力矩  $\tau$ 、输出角速度  $\omega$  下刚体是 lossless passive。本节学习检查：你应该能在每道 passivity 习题里先选储能，再计算导数，再找交叉项抵消或耗散项非负。

#### 4.7 证明细节与理解补充

第六章把第五章的信号增益语言进一步转化为能量语言。无源性最重要的优点是互联性质：被动系统互联时，内部功率项会抵消，储能函数可以相加。

### 4.7.1 耗散不等式的积分与微分形式系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x, u)$$

关于供给率  $w(u, y)$  耗散，如果存在储能函数  $V(x) \geq 0$ ，使得对所有  $T \geq 0$ ，

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq \int_0^T w(u(t), y(t)) dt.$$

若  $V$  连续可微，则微分形式为

$$\dot{V}(x) \leq w(u, y).$$

二者的关系如下。若微分形式成立，对  $[0, T]$  积分立刻得到积分形式。反过来，若积分形式对任意短区间  $[t, t+h]$  成立，

$$V(x(t+h)) - V(x(t)) \leq \int_t^{t+h} w(u(s), y(s)) ds.$$

两边除以  $h$  并令  $h \downarrow 0$ ，在足够光滑条件下得到

$$\dot{V}(t) \leq w(u(t), y(t)).$$

**注 4.1 (供给率可以瞬时为负).** 耗散性不要求  $w(u(t), y(t))$  每一时刻非负。它要求的是储能增加不能超过累计供给。系统可以在某些时刻向外释放能量，此时  $w < 0$ ，只要释放的能量不超过先前储存的能量即可。

### 4.7.2 无源性的基本形式

无源性对应供给率

$$w(u, y) = y^T u.$$

耗散不等式为

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq \int_0^T y^T(t) u(t) dt.$$

若  $u = 0$ ，则

$$V(x(T)) \leq V(x(0)),$$

说明无外部供能时储能不增加。若还有输出严格无源性

$$\dot{V} \leq y^T u - \rho y^T y, \quad \rho > 0,$$

则在  $u = 0$  时

$$\dot{V} \leq -\rho \|y\|^2,$$

输出能量可积。

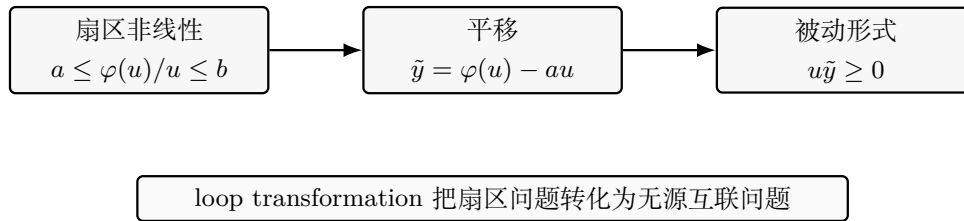


图 4.4 扇区非线性通过平移变换进入被动形式。

#### 4.7.3 记忆 less 非线性与扇区条件

记忆 less 非线性  $y = \varphi(u)$  被动当且仅当

$$u^T \varphi(u) \geq 0.$$

标量情况下，若  $\varphi(0) = 0$  且位于扇区  $[0, k]$ ，即

$$0 \leq \frac{\varphi(u)}{u} \leq k \quad (u \neq 0),$$

则

$$u\varphi(u) \geq 0,$$

所以它是被动的。若扇区为  $[a, b]$ ，常用变换是把非线性写成

$$\tilde{\varphi}(u) = \varphi(u) - au.$$

则

$$u\tilde{\varphi}(u) = u(\varphi(u) - au) \geq 0$$

当  $\varphi(u)/u \geq a$ 。这就是圆判据和 loop transformation 的基础。

#### 4.7.4 正实函数与无源性的频域联系

对 SISO LTI 系统，传递函数  $G(s)$  正实意味着

$$\operatorname{Re} G(s) \geq 0, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

并且在虚轴上通常表现为

$$\operatorname{Re} G(j\omega) \geq 0.$$

若输入输出关系为  $Y(s) = G(s)U(s)$ ，零初值下平均供给功率满足

$$\int_0^T y(t)u(t)dt$$

不为负的性质与  $G(j\omega)$  的实部非负相对应。对 MIMO 系统，条件变为 Hermitian 部分非负：

$$G(j\omega) + G^*(j\omega) \geq 0.$$

## 4.7.5 KYP 引理的配方

考虑 LTI 系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du.$$

取二次储能

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T Px, \quad P = P^T > 0.$$

沿轨线求导：

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{x}^T Px + \frac{1}{2}x^T P\dot{x} = x^T P(Ax + Bu)$$

因为  $P = P^T$ ，更完整地写为

$$\dot{V} = \frac{1}{2}x^T (A^T P + PA)x + x^T P Bu.$$

无源性要求

$$\dot{V} \leq y^T u = (Cx + Du)^T u.$$

把所有项移到左边：

$$\frac{1}{2}x^T (A^T P + PA)x + x^T P Bu - u^T Cx - u^T Du \leq 0.$$

由于标量  $x^T P Bu = u^T B^T Px$ ，可写成二次型

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A^T P + PA) & \frac{1}{2}PB - \frac{1}{2}C^T \\ \frac{1}{2}B^T P - \frac{1}{2}C & -\frac{1}{2}(D + D^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq 0.$$

等价地，

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - C^T \\ B^T P - C & -(D + D^T) \end{bmatrix} \leq 0$$

这就是 KYP/正实引理中最常见的 LMI 形式。它把频域正实性转化为状态空间二次储能函数的存在。

## 4.7.6 无源反馈互联中的功率抵消

设两个系统  $H_1, H_2$  分别满足

$$\dot{V}_1 \leq u_1^T y_1, \quad \dot{V}_2 \leq u_2^T y_2.$$

负反馈互联为

$$u_1 = r_1 - y_2, \quad u_2 = r_2 + y_1.$$

取总储能

$$V = V_1 + V_2.$$

则

$$\dot{V} \leq (r_1 - y_2)^T y_1 + (r_2 + y_1)^T y_2.$$

展开：

$$\dot{V} \leq r_1^T y_1 - y_2^T y_1 + r_2^T y_2 + y_1^T y_2.$$

由于  $-y_2^T y_1 + y_1^T y_2 = 0$ ，内部功率抵消，得到

$$\dot{V} \leq r_1^T y_1 + r_2^T y_2.$$

若外部输入  $r_1 = r_2 = 0$ ，则

$$\dot{V} \leq 0.$$

若其中一个系统严格无源，还可得到额外负项，从而结合可观测性推出渐近稳定。

## 4.7.7 shortage 与 excess 的补偿

实际系统不一定完全被动。常用指标写为

$$\dot{V} \leq u^T y - \rho y^T y - \nu u^T u.$$

若  $\rho > 0$ ，表示输出严格无源，有输出无源裕度；若  $\nu > 0$ ，表示输入严格无源，有输入无源裕度。若  $\rho < 0$  或  $\nu < 0$ ，表示无源性短缺。两个系统互联时，某一侧的 excess 可以补偿另一侧的 shortage。例如若系统 1 满足

$$\dot{V}_1 \leq u_1^T y_1 - \rho_1 y_1^T y_1,$$

系统 2 满足

$$\dot{V}_2 \leq u_2^T y_2 + \alpha y_2^T y_2,$$

则反馈后若  $\rho_1$  经过互联关系足以压过  $\alpha$ ，总储能仍可下降。这就是无源化控制、虚拟阻尼和 loop transformation 的理论依据。

## 4.7.8 loop transformation 的推导思想

若非线性位于扇区  $[a, b]$ ，可通过线性变换把它转化到标准被动扇区。标量情况下设

$$y = \varphi(u), \quad (y - au)(bu - y) \geq 0.$$

定义

$$\tilde{y} = y - au.$$

则

$$\tilde{y}u = (y - au)u.$$

如果  $y/u \geq a$ ，则  $\tilde{y}u \geq 0$ ，所以从  $u$  到  $\tilde{y}$  是被动的。另一方面，上界  $y/u \leq b$  可转化为另一个反馈增益限制。这样原来的扇区非线性问题可以转化为无源非线性与线性系统互联的问题。

4.7.9 无源性与  $\mathcal{L}_2$  增益的关系

如果系统输出严格无源：

$$\dot{V} \leq u^T y - \rho y^T y, \quad \rho > 0,$$

用 Young 不等式

$$u^T y \leq \frac{1}{4\rho} u^T u + \rho y^T y,$$

得到

$$\dot{V} \leq \frac{1}{4\rho} u^T u.$$

这个式子本身只给储能界。若保留输出项，则

$$\dot{V} \leq \frac{1}{4\rho} u^T u - \rho y^T y + \rho y^T y?$$

更正确的处理是从

$$\dot{V} \leq u^T y - \rho y^T y$$

完成平方：

$$u^T y - \rho y^T y = -\rho \left\| y - \frac{1}{2\rho} u \right\|^2 + \frac{1}{4\rho} u^T u \leq \frac{1}{4\rho} u^T u.$$

若还需要输出能量界，可使用

$$u^T y \leq \frac{1}{2\epsilon} u^T u + \frac{\epsilon}{2} y^T y$$

并选  $\epsilon < 2\rho$ ，得

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2\epsilon} u^T u - \left(\rho - \frac{\epsilon}{2}\right) y^T y.$$

积分后得到

$$\left(\rho - \frac{\epsilon}{2}\right) \|y_T\|_2^2 \leq \frac{1}{2\epsilon} \|u_T\|_2^2 + V(x(0)).$$

因此输出严格无源给出有限  $\mathcal{L}_2$  增益。

**注 4.2 (为什么无源性比小增益保守但结构性强).** 小增益只关心信号大小，不关心功率方向；无源性关心能量方向，因此对互联结构特别友好。无源条件通常是充分非必要条件，所以可能保守；但一旦满足，稳定性结论对互联规模和未知被动环境具有很强鲁棒性。

#### 4.7.10 例题九：RLC 电路的无源性

设串联 RLC 电路输入为电压  $u$ ，输出为电流  $i$ 。状态取电感电流  $i$  和电容电压  $v_C$ 。储能函数为

$$V = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cv_C^2.$$

由电路方程

$$Li\dot{i} = u - Ri - v_C, \quad C\dot{v}_C = i.$$

求导：

$$\dot{V} = Li\dot{i} + Cv_C\dot{v}_C.$$

代入方程：

$$\dot{V} = i(u - Ri - v_C) + v_C i.$$

交叉项抵消：

$$\dot{V} = ui - Ri^2.$$

由于  $Ri^2 \geq 0$ ，有

$$\dot{V} \leq ui.$$

所以从电压  $u$  到电流  $i$  的系统是无源的。若  $R > 0$ ，还有耗散项  $Ri^2$ ，表示电阻把储能转化为热。

#### 4.7.11 例题十：KYP 不等式的一步验证

给定

$$\dot{x} = -x + u, \quad y = x.$$

取

$$V = \frac{1}{2} x^2.$$

则

$$\dot{V} = x(-x + u) = -x^2 + xu.$$

由于  $y = x$ ，

$$\dot{V} = -y^2 + yu \leq yu.$$

所以系统无源，而且输出严格无源。频域传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

在虚轴上

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}.$$

其实部为

$$\operatorname{Re} G(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} > 0.$$

这与时域无源性一致。这个例子展示了正实函数、储能函数和无源不等式之间的一一对应。

## 4.8 本章自检

### 4.8.1 第六章自检

1. 能解释储能函数、供给率、耗散不等式和无源性的关系。
2. 能说明供给率可以瞬时为负，但累计能量预算仍然成立。
3. 能判断记忆 less 非线性是否被动，以及如何做扇区变换。
4. 能从二次储能函数推导 KYP 矩阵不等式。
5. 能推导两个无源系统负反馈互联时内部功率抵消。
6. 能解释 output strictly passive 为什么可以导出  $\mathcal{L}_2$  增益或渐近稳定。
7. 能说明 passivity theorem 中为什么还需要零状态可观测性或可检测性。

## 4.9 全书最终图景

### 4.9.1 最终理解图景

从第 3 章到第 6 章，所有证明都可以归纳成四步：

选对象  $\Rightarrow$  算导数或范数  $\Rightarrow$  建立不等式  $\Rightarrow$  推出稳定结论.

第三章选的是解差  $\|x-z\|$ ；第四章选的是  $V(x)$ ；第五章选的是  $\|y\|_p$ ；第六章选的是储能  $V$  与供给率  $y^T u$ 。真正的难点不是记住定理名称，而是知道在不同问题中应该选择哪个对象，以及如何把它变成可闭合的不等式。

## 参考文献

---

- [1] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [2] J. C. Willems, “Dissipative dynamical systems,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 45, pp. 321–393, 1972.
- [3] D. J. Hill and P. J. Moylan, “The stability of nonlinear dissipative systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-21, no. 5, pp. 708–711, 1976.
- [4] P. J. Moylan and D. J. Hill, “Stability criteria for large-scale systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-23, no. 2, pp. 143–149, 1978.